Systèmes Mécaniques Articulés et robotique

Enseignante. Far Sihem

Université Bedji Mokhtar-Annaba

Faculté de Technologie

Département Génie Mécanique

Email : sihem.far@univ-annaba.dz

Mars 2024

Construction Mécanique

Table des matières

Objectifs

A l'issue de cet enseignement d'apprentissage, l'apprenant sera capable identifier correctement les différentes caractéristiques du systèmes mécaniques articulés qui se présentent comme suit:

• Acquisition quelques concepts de base mais fondamentaux de la robotique tels que les degrés de liberté, L'espace de configuration, l'espace opérationnel.

• Comprendre les techniques de de calcul du nombre de degrés de mobilité d'un mécanisme (ou d'un robot).

• Acquisition de la capacité de passer du domaine de manipulation des objets dans l'espace représentés en aux applications de modèle mathématique des matrices de transmission homogènes.

• Devenir capable d'analyser un Système mécanique articulé par la méthode Denavit-Hartenberg DH

• Structurer et organiser le reste de contenu après avoir identifié les savoirs à utiliser en déterminant le modèle géométrique jusqu'à l'obtention des model cinématique et dynamique.

Paramétrage d'un solide et une chaine de solides dans l'espace

1. Introduction

Les robots manipulateurs sont en général des mécanismes à chaine ouverte, qui possèdent un ou plusieurs degrés de mobilité. Pour l'analyse cinématique, statique ou dynamique de ces systèmes, La théorie des mécanismes s'appuie sur l'étude des chaînes de solides doit être étudiée car c'est la base de l'étude et dimensionnement des mécanismes.

Les mécanismes et les structures résultent de l'agencement d'éléments rigides liés les uns aux autres ; ils comportent donc un nombre entier de pièces et un autre nombre entier, généralement différent, de liaisons.

Dans un mécanisme formé de n + 1 pièces, on appelle généralement socle ou bâti celle qui sert de référence pour étudier, par la statique ou la cinématique, le comportement des n autres pièces.

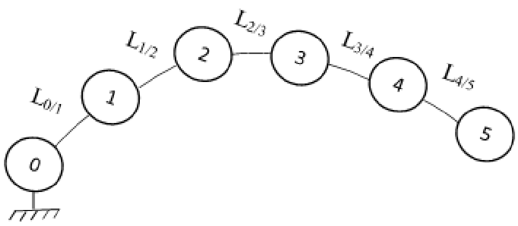
Une liaison résulte de la mise en contact de deux pièces par l'intermédiaire de surfaces fonctionnelles appropriées. On attend d'une liaison qu'elle transmette certains efforts d'une pièce à l'autre, ou qu'elle interdise certains mouvements d'une pièce par rapport à l'autre. On dit bien « interdise » et non pas « autorise ».

2. Chaînes de solides

2.1. Chaîne ouverte

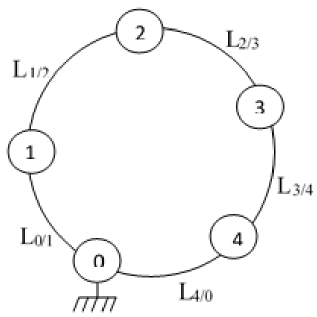
Une chaîne de solides S1, S2, S3, ..., Sn est dite ouverte si les solides placés à l'extrémité sont différents.

S1→ S2→ S3→……… →Sn



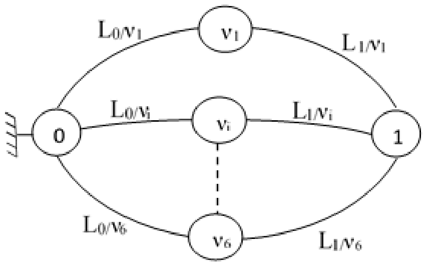
2.2. Chaîne fermée

Une chaîne de solides S1, S2, S3, ..., Sn est dite fermée si le solide initial est le même que le solide final. S1→ S2→ S3→……… Sn →S1



2.3. Chaîne complexes

Une chaîne de solides S1, S2, S3, ..., Sn est dite complexe si elle comporte plusieurs chaînes ouvertes ou fermées.



3. Etude cinématique des chaînes cinématiques simples ouvertes

Le repère $R_0 = (O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ est lié au bâti fixe (0) (*référentiel de base* p.13),, O est le centre de la liaison L_{10}

Le repère $R_1 = (A,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ est lié à la pièce (1) (*référentiels auxiliaires* p.13), A est le centre de la liaison L_{12}

L’étude cinématique des chaînes cinématiques simples ouvertes consiste dans la recherche du torseur cinématique équivalent $\{\tau_c^{eq}(n/0)\}$exprimé dans le référentiel de base $R_0 = (O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, ce torseur défini le mouvement général de l’organe terminal en fonction des mouvements élémentaires $\{\tau_c(i/i-1)\}$ autoriser par les liaisons intermédiaires Li,i-1(i=1,2,…,n) .

Pour effectuer l’étude cinématique on applique la loi du composition des mouvements.

$$\{\tau_c(n/n-1)\} + \{\tau_c(n-1/n-2)\} + ,,,,,\{\tau_c(2/1)\} + \{\tau_c(1/0)\} = \{\tau_c^{eq}(n/0)\}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\{\tau_c(i/i-1)\} = \{\tau_c^{eq}(n/0)\}$$

Il est très important de noter que l’écriture de (1) doit ce faire dans le même point et le même repère.

La solution de (1) permet de trouver le $\{\tau_c^{eq}(n/0)\}$ et par la suite déduire la nature de la liaison $L_{n,0}^{eq}$

3.1. Etude da la mobilité cinématique de la chaîne

a) Degré de mobilité d’un mécanisme

Degré de mobilité m caractérise le nombre de mouvement indépendant d’un mécanisme.

-un mécanisme est immobile lorsque m=0 ;

-un système est mobile de mobilité m lorsque m>0 ;

b) La mobilité interne m_i

Mobilité interne c’est une mobilité qui caractérise le mouvement d’une pièce indépendamment des autres pièces (rotation d’une pièce sur elle-même.

Cette notion de mobilité interne est étendue aux mobilités du mécanisme qui ne concerne que pièces internes dont le mouvement n’entraine pas de mouvement des pièces en relation avec le milieu extérieur.

? *Exemple*

La relation propre d’un piston d’une pompe hydraulique autour de son axe

c) La mobilité cinématique utile m_u

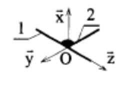
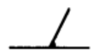
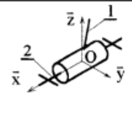
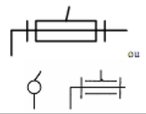
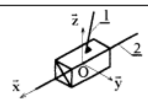
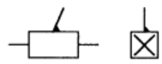
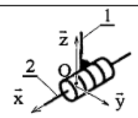
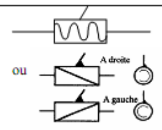
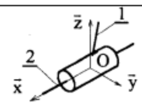
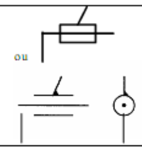
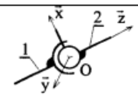
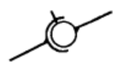
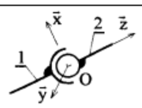
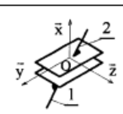
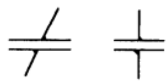
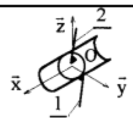
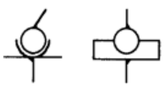
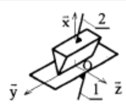
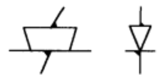
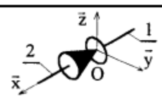
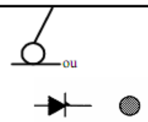
Elle est égale au nombre de composantes non nuls du $\{\tau_c^{eq}(n/0)\}$trouver par l'étude cinématique

Relation entre les mobilités cinématiques.

(Mobilité utile c'est la ou les mobilités souhaitables du mécanisme)

Avec $m = m_u + m_i$

Rappelle sur les liaisons simples (tableau des liaisons simples)

Degré de mobilité	Désignation	Schématisation spatiale	Schématisation plane	Forme du torseur cinématique
0	Liaison **encastrement**			$\{V_{1/2}\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
1	Liaison **pivot** d'axe $(O,\vec{x})$			$\{V_{1/2}\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} \omega_{x\,1/2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
1	Liaison **glissière** de direction $\vec{x}$			$\{V_{1/2}\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} 0 & v_{x\,O,1/2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
1	Liaison **hélicoïdale** d'axe $(O,\vec{x})$			$\{V_{1/2}\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} \omega_{x\,1/2} & v_{x\,O,1/2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ *pas à droite :* $v_{x\,O,1/2} = \frac{p \times \omega_{x\,1/2}}{2\pi}$ *pas à gauche :* $v_{x\,O,1/2} = \frac{-p \times \omega_{x\,1/2}}{2\pi}$
2	Liaison **pivot glissant** d'axe $(O,\vec{x})$			$\{V_{1/2}\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} \omega_{x\,1/2} & v_{x\,O,1/2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
2	Liaison **sphérique à doigt** d'axes $(O,\vec{x})$ et$(O,\vec{y})$			$\{V_{1/2}\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} \omega_{x\,1/2} & 0 \\ \omega_{y\,1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
3	Liaison **sphérique** (rotule) de centre O			$\{V_{1/2}\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} \omega_{x\,1/2} & 0 \\ \omega_{y\,1/2} & 0 \\ \omega_{z\,1/2} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
3	Liaison **appui plan** de normale $\vec{x}$			$\{V_{1/2}\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} \omega_{x\,1/2} & 0 \\ 0 & v_{y\,O,1/2} \\ 0 & v_{z\,O,1/2} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
4	Liaison **sphère cylindre** (linéaire annulaire) de centre O et de direction $\vec{x}$			$\{V_{1/2}\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} \omega_{x\,1/2} & v_{x\,O,1/2} \\ \omega_{y\,1/2} & 0 \\ \omega_{z\,1/2} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
4	Liaison **arête plan** (cylindre plan ou linéaire rectiligne) de normale $\vec{x}$ et d'axe$(O,\vec{y})$			$\{V_{1/2}\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} \omega_{x\,1/2} & 0 \\ \omega_{y\,1/2} & v_{y\,O,1/2} \\ 0 & v_{z\,O,1/2} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
5	Liaison **sphère plan** (ponctuelle) de normale$(O,\vec{x})$			$\{V_{1/2}\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} \omega_{x\,1/2} & 0 \\ \omega_{y\,1/2} & v_{y\,O,1/2} \\ \omega_{z\,1/2} & v_{z\,O,1/2} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

4. Mouvements d’un corps rigide et transformations homogènes

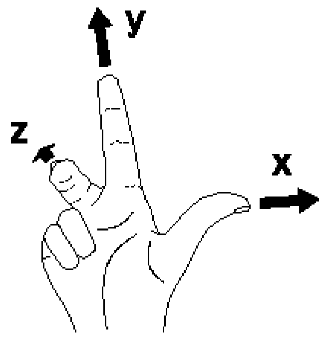
4.1. Introduction

Pour le développement des équations cinématiques du robot manipulateur, il est nécessaire d'établir plusieurs systèmes de coordonnées pour représenter les positions et les orientations de corps rigides. Il est également nécessaire de connaître les transformations de coordonnées entre ces systèmes, afin que les vecteurs représentant des positions, des vitesses et des accélérations, donnés dans un système de coordonnées donné, puissent être représentés dans d'autres systèmes de coordonnées. Dans ce chapitre, nous étudierons les opérations de rotation et de translation entre systèmes de coordonnées tridimensionnelles, en introduisant le concept de transformations homogènes [3[3] p.14]

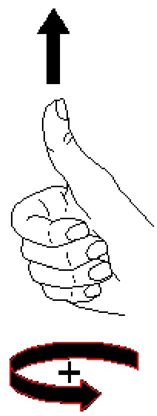
Complément

L'ordre relatif des axes est donné par la règle de la main droite, illustrée dans le tableau suivant

Règle de la main droite pour la formation de systèmes de coordonnées 3D. Le pouce correspond à l’axe des z, l’indicateur à l’axe des x et le majeur à l’axe des y



Règle de la main droite : la direction des doigts qui se ferment dans la main indique le sens positif de l'angle de rotation.



4.2. Matrice de rotation plane

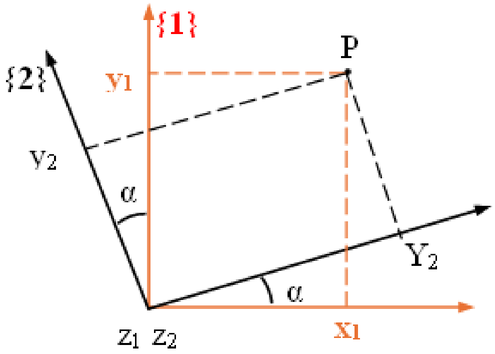
Soit deux repères orthonormés directs partageant la même origine : et . On effectue une transformation amenant R_1 vers R_2 : rotation d’un angle θ autour de l’axe x puis on exprime le repère R_2 dans le repère R_1 :

- Rotation (z_1,α)

$$X_1 = \cos\alpha x_2 - \sin\alpha y_2 + 0z_2$$
$$Y_2 = \cos\alpha x_1 - \sin\alpha y_2 + 0z_2$$
$$Z_1 = 0x_1 - 0y_2 + 1z_2$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow {}^{1}P = {}^{1}_{2}R \times {}^{2}P$$

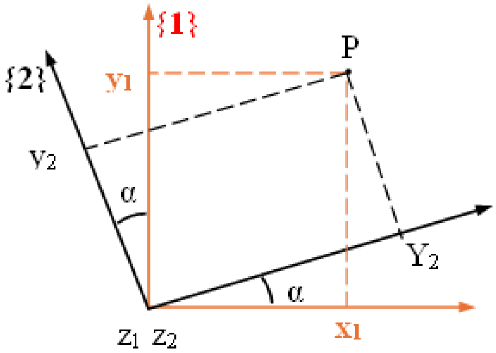


Cette matrice est appelée matrice de rotation, matrice de passage ou matrice de changement de base, Il est possible de définir d'autres rotations rapport aux axes x et y comme suit:

- Rotation (y_1,β)

$$X_1 = \cos\beta x_2 + 0y_2 + \sin\beta z_2$$
$$Y_1 = 0x_2 + 1y_2 + 0z_2$$
$$Z_1 = -\sin\beta x_2 - 0y_2 + \cos\beta z_2$$

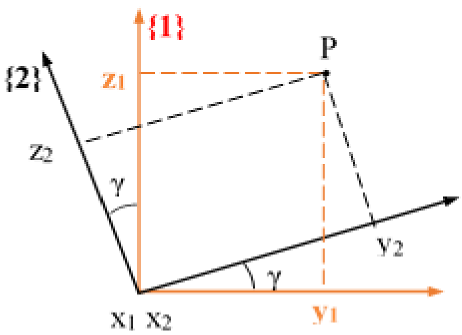
$$\begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$



- Rotation (x,γ)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}$$

$$X_1 = 1x_2 + 0y_2 + 0z_2$$
$$Y_1 = 0x_2 + \cos\gamma y_2 - \sin\gamma z_2$$
$$Z_1 = 0x_2 + \sin\gamma y_2 + \cos\gamma z_2$$



Remarque

Orientation déterminée par trois angles :

On peut exprimer les trois ddl de rotation de R_3 par rapport à R_0 par trois angles. Pour se faire, on définit ayant même origine que R_0 . R_3 peut se déduire de R_0 par trois rotations successives, en définissant deux repères intermédiaires R_1 et R_2.

La première rotation fait passer de R_0 à R_1 la seconde de R_1 à R_2 et la troisième de R_2 à R_3 . Ces trois rotations peuvent alors être définies de différentes manières (à condition que deux rotations consécutives ne soient pas autour du même axe).

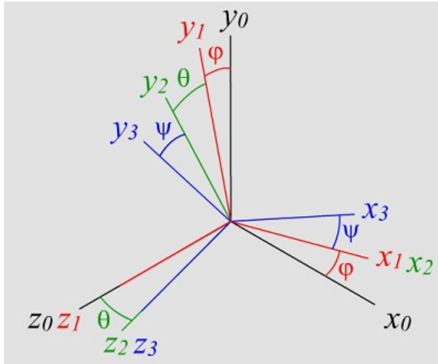
4.3. Angles d'Euler

Les angles d'Euler définissent les trois rotations suivantes :

– la précession ϕ, autour de l'axe z_0 fait passer de R_0 à R_1

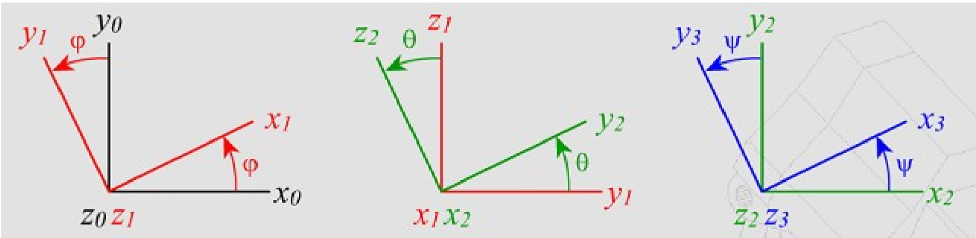
– la nutation θ, autour de l'axe x_1 , fait passer de R_1 à R_2

– la rotation propre ψ, autour de l'axe, z_2 fait passer de R_2 à R_3.



La transformation entre R_0 et R_3 définie par les angles d'Eleur s'écrit donc :

$$ {}^{0}R_3 = Rot(Z_0,\varphi) * Rot(x_1,\theta) * Rot(Z_2,\psi) $$



– Rotation autour de l'axe z_0 d'un angle ϕ fait passer de R_0 à R_1 :

$$ Rot(Z_0,\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

– Rotation autour de l'axe x_1 d'un angle θ fait passer de R_1 à R_2

$$ Rot(x_1,\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} $$

– Rotation autour de l'axe z_2 d'un angle ψ fait passer de R_2 à R_3

$$ Rot(Z_2,\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & co\,\psi \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{0}R_3 = \begin{bmatrix} c\alpha c\psi - s\varphi c\theta s\psi & -c\varphi s\psi - s\varphi c\theta c\psi & s\varphi s\theta \\ s\alpha c\psi + c\varphi c\theta s\psi & -s\varphi s\psi + c\varphi c\theta c\psi & -s\varphi s\theta \\ s\theta s\psi & s\theta c\psi & c\theta \end{bmatrix} $$

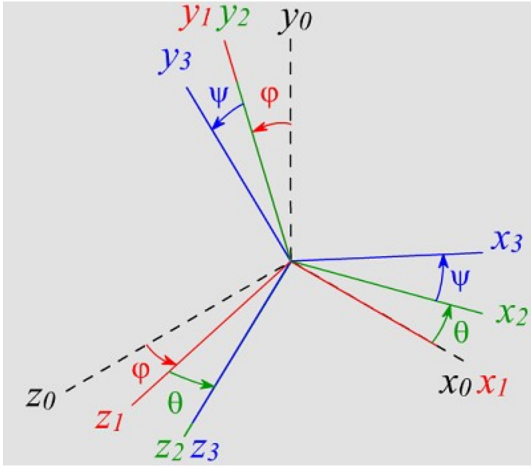
4.4. Les angles de Roulis et Tangage et Lacet

Ces angles, appelés également angles aéronautiques sont très utilisés dans le domaine industriel. A la différence des angles d'Eleur, ces trois rotations s'effectuent par rapport à un référentiel fixe. L'orientation du repère R_3 dans un repère R_0 est donc spécifiée par trois angles : Roulis, Tangage et Lacet.

ϕ : Roulis : rotation autour de x_0

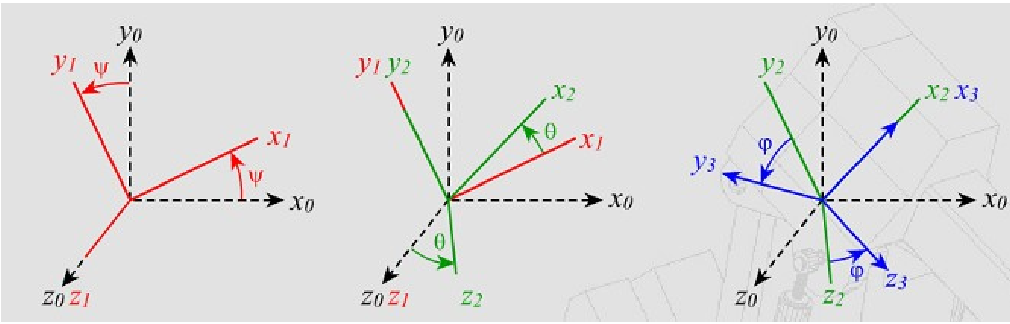
θ : Tangage : rotation autour de y_0

Ψ : Lacet : rotation autour de z_0



La transformation entre R_0 et R_3 définie par les angles Roulis Tangage Lacet s'écrit :

$$^{0}R_3 = Rot(Z_0,\psi) * Rot(y_0,\theta) * Rot(x_0,\varphi)$$



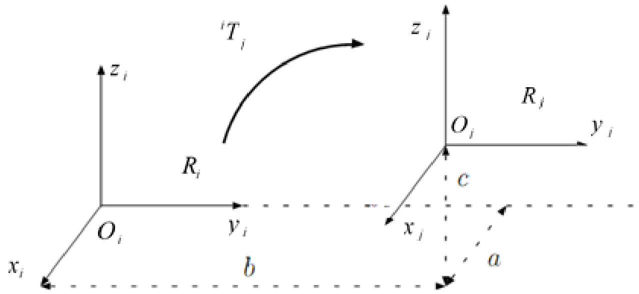
$$^{0}R_3 = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$^{0}R_3 = \begin{bmatrix} c\alpha c\psi - s\varphi c\theta s\psi & -c\varphi s\psi - s\varphi c\theta c\psi & s\varphi s\theta \\ s\alpha c\psi + c\varphi c\theta s\psi & -s\varphi s\psi + c\varphi c\theta c\psi & -s\varphi s\theta \\ s\theta s\psi & s\theta c\psi & c\theta \end{bmatrix}$$

4.5. Transformations homogènes

La représentation d'opérations sous forme matricielle est très intéressante pour simplifier L'écriture. Il serait intéressant de pouvoir inclure aussi les translations sous forme matricielle.

Pour faire cela on introduit les coordonnées homogènes. Il s'agit de former une matrice 4x4 avec la matrice orientation et le vecteur position.



$${}^{i}T_{j} = \begin{bmatrix} s_x n_x a_x p_x \\ s_y n_y a_y p_y \\ s_z n_z a_z p_z \\ 0\ 0\ 0\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & {}^{i}R_{j} & & {}^{i}P_{Oj} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Où :

${}^{i}R_{j}$: Matrice (3×3) des rotations donnant l'orientation de R_j dans R_i

${}^{i}P_{Oj}$: Matrice (3×1) des translations donnant la position de l'origine du repère R_j dans R_i

$${}^{i}T_{j} = \begin{bmatrix} & {}^{i}R_{j} & & {}^{i}P_{Oj} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & I_3 & & {}^{i}P_{Oj} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} & {}^{i}R_{j} & & 0_{3\times1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Matrice de transformation homogène de translation pure

Lorsque deux repères sont uniquement liés par une translation, il est possible de passer de l'un à l'autre en utilisant une matrice de transformation homogène de translation pure. Soit deux repères R_i et R_j de même base, ayant comme origines, les deux points O_i et O_j respectivement.Considérons une translation composée de :

− d'une translation a selon l'axe x

− d'une translation b selon l'axe y

− d'une translation c selon l'axe z

Cette translation est exprimée par :

$${}^{i}T_{j} = Trans(x,a) * Trans(y,b) * Trans(z,c)$$

b) Transformation par rapport à un référentiel mobile

Soit les deux référentiels R_a et R_b . Puisque nous allons considérer que nous connaissons la

description du référentiel R_b par rapport au référentiel R_a , c'est-à-dire la matrice de transformation homogène ${}^{b}T_{a}$, nous pouvons considérer le référentiel R_a comme étant fixe et le référentiel R_b comme étant mobile.

La description d'un référentiel R_c par rapport au référentiel R_a, obtenue en appliquant une

Transformation T par rapport au référentiel R_b est définie par:

$${}^{i}T_{j} = {}^{a}T_{b} * T$$

c) Transformation par rapport au référentiel fixe

On cherche à trouver la description, par rapport au référentiel R_a , d’un référentiel R_c obtenu en appliquant une transformation T par rapport au référentiel R_a. Cette description est définie par:

$$^{i}T_{j} = T * {}^{a}T_{b}$$

Glossaire

Référentiel de base

Un référentiel dans un modèle géométrique qui représente la base d'un robot. Le mouvement du châssis de base entraîne le mouvement de l'ensemble du robot sous la forme d'un corps rigide.

Référentiels auxiliaires

Un référentiel dans un modèle géométrique qui ne représente pas un corps, mais représente un point de référence pratique sur le corps représenté par son prédécesseur.

Bibliographie

[3] Modeling, Identification & Control of Robots, W. Khalil, E. Dombre, Hermes Penton Science 2002