Chapitre 0

Eléments d'analyse vectorielle

1-champ scalaire –champ vectoriel:

On considère un trièdre de vecteur unitaires $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et M un point de l'espace, de coordonnées (x, y, z) .

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

- La fonction $f(M)$ est dite scalaire de point ou champ scalaire si:

$$f(M) = f(x, y, z)$$

- Le vecteur $\vec{v}$ (M) est dite fonction vectoriel de point ou champ vectoriel si:

$$\vec{v}(M) = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

2- Gradient d'un champ scalaire :

Le gradient (noté $\overrightarrow{grad}$) est défini a partir d'une fonction scalaire de point et a pour composante suivant $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les dérivées partielles de $f(M)$ par rapport à (x, y, z) respectivement:

$$\overrightarrow{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

3- Divergence d'un champ vectoriel:

Le divergence (noté div) n'est défini qu'a partir d'une fonction vectoriel $\vec{A}$ (M) de point et donne une fonction scalaire de point définie en coordonnées cartésiennes par:

$$\boldsymbol{div\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

4- Rotationnel d'un champ vectoriel:

Le rotationnel (noté $\overrightarrow{rot}$) d'un champ vectoriel donne une fonction de point définie en coordonnées cartésiennes par:

$$\boldsymbol{\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{v}) = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\vec{j} + = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\vec{k}}$$

5- Laplacien scalaire :

Le laplacien scalaire d'une fonction scalaire de point (noté $lap\ ou\ \Delta$) est par définition :

$$lap(f) = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

6- Laplacien vectoriel :

Le laplacien vectoriel (noté $\overrightarrow{lap}$ *ou* $\vec{\Delta}$) d'une champ vectoriel défini par:

$$\overrightarrow{lap}\,(\vec{A}) = \Delta\vec{A} = \overrightarrow{graddiv}\vec{A} - \overrightarrow{rotrot}\vec{A}$$

-Dans un repère de coordonnées cartésiennes le laplacien vectoriel a les composantes suivantes:

$$\overrightarrow{lap}\,(\vec{A}) \begin{cases} \Delta A_x = \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \Delta A_y = \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \Delta A_z = \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{cases}$$

7- Operateur nabla:

On peut représenter tous les operateur vectoriels précédemment avec l'operateur nabla défini par:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

Les opérateur vectoriels $(grad, div, rot\ et\ laplacien)$ s'écrive avec l'operateur nabla sous les formes:

$$\overrightarrow{grad} f = \vec{\nabla}\ f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$div\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

$$\Delta f = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\ f) = div\overrightarrow{grad} f = \vec{\nabla}.\vec{\nabla} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \nabla^2(f)$$

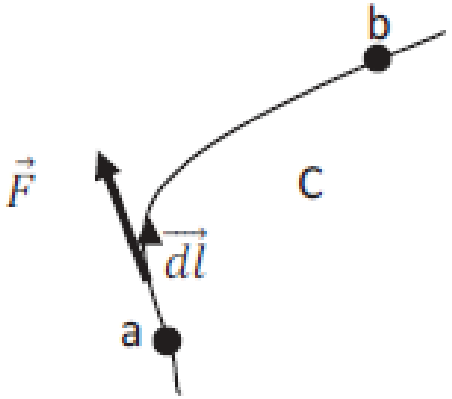
$$\Delta\vec{A} = \overrightarrow{graddiv}\vec{A} - \overrightarrow{rotrot}\vec{A} = \vec{\nabla}\vec{\nabla}.\vec{A} - \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

8- Théorème de Stokes – Théorème de Gauss:

8.1- Circulation d'un champ vectoriel:

On défini la circulation d'un vecteur $\vec{f}$ le long d'un contour (c), par l'intégrale curviligne :

$$C(\vec{F}) = \int_a^b \vec{F}.\overrightarrow{dl}$$



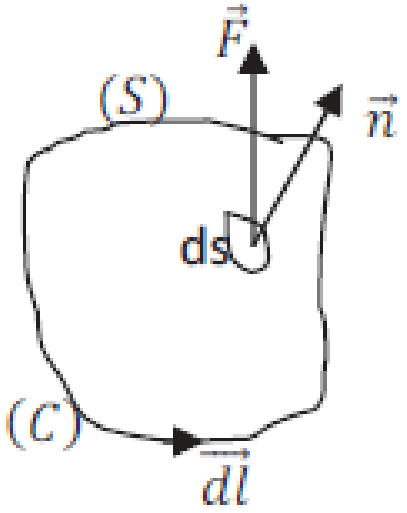
La circulation le long d'un contour fermé est notée:

$$C(\vec{F}) = \oint \vec{F}\overrightarrow{dl}$$

dl: est un élément de longueur.

8.2- Flux d'un champ vectoriel:

On défini le flux d'un vecteur $\vec{f}$ a travers un surface (s) par l'intégrale double :



$$\emptyset(\vec{F}) = \iint \vec{F}\vec{n}ds$$

ds: est un élément de surface.

Lorsque la surface (s) est fermée, le vecteur $\vec{n}$ est dirigé de l'intérieur vers l'extérieur.

8.3- Théorème de Stockes:

La circulation d'un vecteur le long d'un contour fermée (c) est égale ou flux de son relationnel à travers cette surface.

$$\oint \vec{F}.\overrightarrow{dl} = \oiint \overrightarrow{rot}\vec{F}.\overrightarrow{ds}$$

8.4- Théorème de Gauss - Ostrogradski:

Le flux d'un champ vectoriel à travers une surface fermée (S) est égal à l'intégrale de sa divergence dans le volume v, limité par la surface fermée (S) :

$$\oiint \vec{F}.\overrightarrow{ds} = \iiint div\vec{F}dv$$

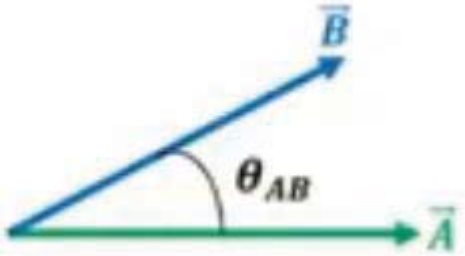
9- Produit des vecteurs:

9.1- Produit scalaire:

$$\vec{A}.\vec{B} = A.Bcos(A,B)$$

Avec $\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}$ et $\vec{B} = B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath} + B_z\vec{k}$

A=$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

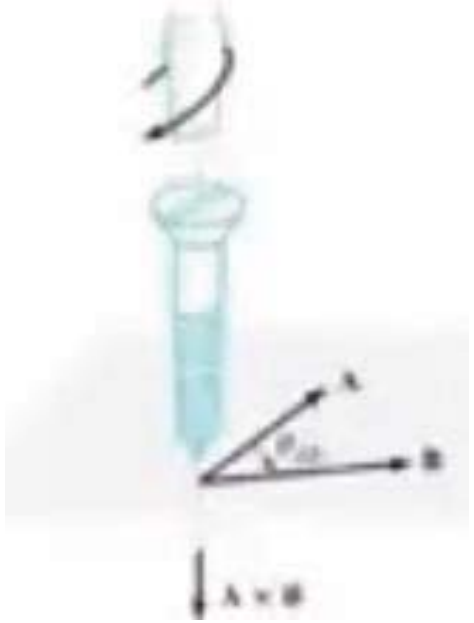


Quelques propriétés :

1. $\vec{A} \cdot \vec{A} = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{A}\| = \|\vec{A}\|^2$
2. $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$ (Le produit scalaire est commutatif)
3. $(\lambda.\vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A}.(\lambda.\vec{B}) = \lambda.(\vec{A}.\vec{B})$
4. $\vec{C}.(\vec{A} + \vec{B}) = \vec{C} \cdot \vec{A} + \vec{C} \cdot \vec{B}$
5. $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ Si et seulement si $\vec{A}$ *et* $\vec{B}$ sont orthogonaux : $\vec{A} \perp \vec{B}$

9.3- Produit vectoriel:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = A.B.sin(A,B).$$



Quelques propriétés :

1. $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$
2. $\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$
3. $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A}.\vec{C}).\vec{B} - (\vec{A}.\vec{B}).\vec{C}$
4. $\vec{A} \wedge \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \vec{A} = \vec{0}, \vec{B} = \vec{0}$ *ou bien* $\vec{A}$ *et* $\vec{B}$ *sont colinéaires.*

10- Relations importantes:

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{grad}f = \vec{0}$$

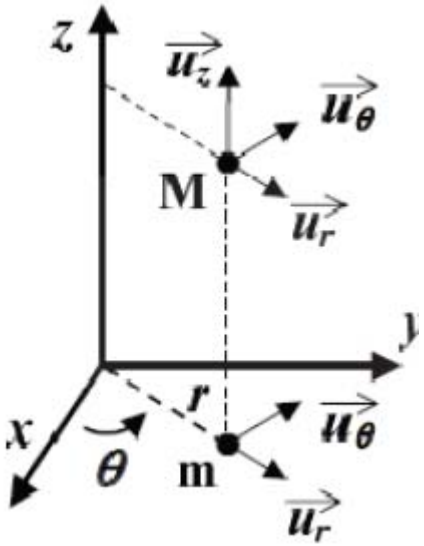
$$div\overrightarrow{rot}\vec{F} = 0$$

$$div(\vec{F} \wedge \vec{K}) = \vec{K}\overrightarrow{rot}\vec{F} - \vec{F}\overrightarrow{rot}\vec{K}$$

$$\overrightarrow{rot}(f.\vec{K}) = f\overrightarrow{rot}\vec{K} + \overrightarrow{grad}(f \wedge \vec{K})$$

$$\overrightarrow{Rot}\overrightarrow{Rot}\vec{A} = \overrightarrow{grad}div\vec{A} - \Delta\vec{A}$$

11- Coordonnées cylindriques:



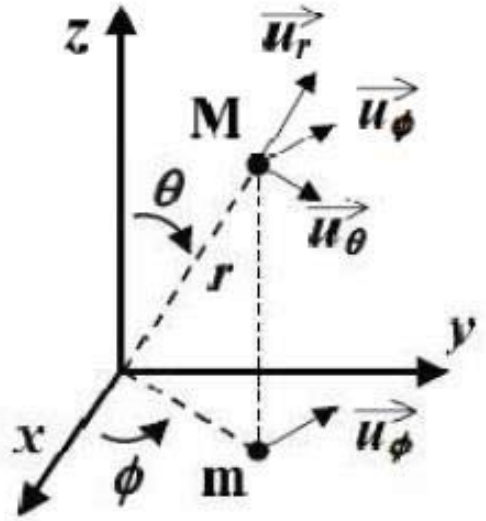
$$\overrightarrow{grad}V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z$$

$$\overrightarrow{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial r A_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_z$$

$$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

11- Coordonnées Sphériques:



$$\overrightarrow{grad}V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial V}{\partial \emptyset}\vec{u}_\emptyset$$

$$div\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 A_r}{\partial r} + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial sin\theta A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial A_\emptyset}{\partial \emptyset}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = \frac{1}{rsin\theta}\left(\frac{\partial sin\theta . A_\emptyset}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \emptyset}\right)\vec{u}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \emptyset} - \frac{\partial r A_\emptyset}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)$$

$$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 rV}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \emptyset^2}$$