Chapitre 5
Propagation du champ électromagnétique

5.1.1. Equations de Maxwell dans le vide

Les équations de Maxwell dans le vide ($\rho = 0\ et\ \vec{J} = 0$) :

$$div\vec{E} = 0 \tag{5.1}$$

$$div\vec{B} = 0 \tag{5.2}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{5.3}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{5.4}$$

5.1.1.1 Equation de propagation en champ électrique

On calcule le rotationnel de l'équation (5.3)

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{E}) = \overrightarrow{rot}(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t})$$

Or :

$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{E}\right) = \overrightarrow{grad}div\vec{E} - \Delta\vec{E}$, avec $div\vec{E} = 0$, $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$, il vient :

$$-\Delta\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{rot}\vec{B}$$

Soit finalement

$$\Delta\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad (5.5)$$

5.1.1.2 Equation de propagation en champ d'induction magnétique

De manière symétrique, on élimine $\vec{E}$au profit de $\vec{B}$ en calculant le rotationnel de l'équation de Maxwell-Ampère (équation 5.4) :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{B}\right) = \overrightarrow{grad}div\vec{B} - \Delta\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{rot}(\vec{E})$$

Soit
$$\overrightarrow{grad}(0) - \Delta\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t})$$

Finalement :
$$\Delta\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0 \qquad (5.6)$$

5.1.1.3 Equation de propagation en potentiel vecteur

L'équation de Maxwell $div\vec{B} = 0$ montre qu'il existe un champ vectoriel $\vec{A}$ tel que :

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A}$$

L'équation de Maxwell Ampère s'écrit donc :

$$\overrightarrow{rot}\,(\overrightarrow{rot}\vec{A}) = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(-\overrightarrow{grad}V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t})$$

Ou $\overrightarrow{grad}div\vec{A} - \Delta\vec{A} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{grad}V + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t})$

Soit $\quad \Delta\vec{A} - \overrightarrow{grad}\left(div\vec{A} + \frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$

Si on admet la condition de jauge de Lorentz

$$div\vec{A} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \qquad (5.7)$$

Alors le potentiel vecteur $\vec{A}$ obéit à l'équation de propagation :

$$\Delta\vec{A} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0 \qquad (5.8)$$

5.1.1.4. Equation de propagation en potentiel scalaire

L'équation de Maxwell Gauss électrique s'écrit :

$$div\left(-\overrightarrow{grad}V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

Soit $\quad \Delta V + \frac{\partial}{\partial t}\left(div\vec{A}\right) = 0$

Avec la jauge de Lorentz, il vient :

$$\Delta V + \frac{\partial}{\partial t}\left(-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial t}\right) = 0$$

$$\Delta V - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \qquad (5.9)$$

Résumé : tenu de $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$, avec c la vitesse de lumière dans le vide

$$\begin{cases} \Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \qquad (5.10)$$

5.2. Onde électromagnétique plane

Une onde électromagnétique est dite plane si $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ne sont fonction que d'une coordonnée d'espace (x de M par exemple) et du temps t donc chacune des composantes $\vec{E}(x,t)$ et $\vec{B}(x,t)$ obéit, d'après les deux équations de propagation en champ électrique et magnétique, à l'équation différentielle du type :

$$\frac{\partial^2 s(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s(x,t)}{\partial t^2}$$

Dont la solution générale est :

$$s(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g(t + \frac{x}{c})$$

Si on désigne $\overrightarrow{u_x}$ le vecteur unitaire suivant la direction ox.

- $f(t - \frac{x}{c})$ est l'équation d'une onde plane qui se propage suivant ox dans le sens des x positifs à la vitesse $c\overrightarrow{u_x}$ (onde progressive).
- $f(t + \frac{x}{c})$ est l'équation d'une onde plane qui se propage suivant ox dans le sens des x négatifs à la vitesse $-c\overrightarrow{u_x}$ (onde rétrograde).

5.2.1. Propriétés de l'onde plane

1-L'OEM est transversale ($\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires à l'axe de propagation) et la direction de propagation est définie par ($\vec{E} \wedge \vec{B}$).

2- La relation entre *E* et *B* : *E(x,t)=C.B(x,t)*

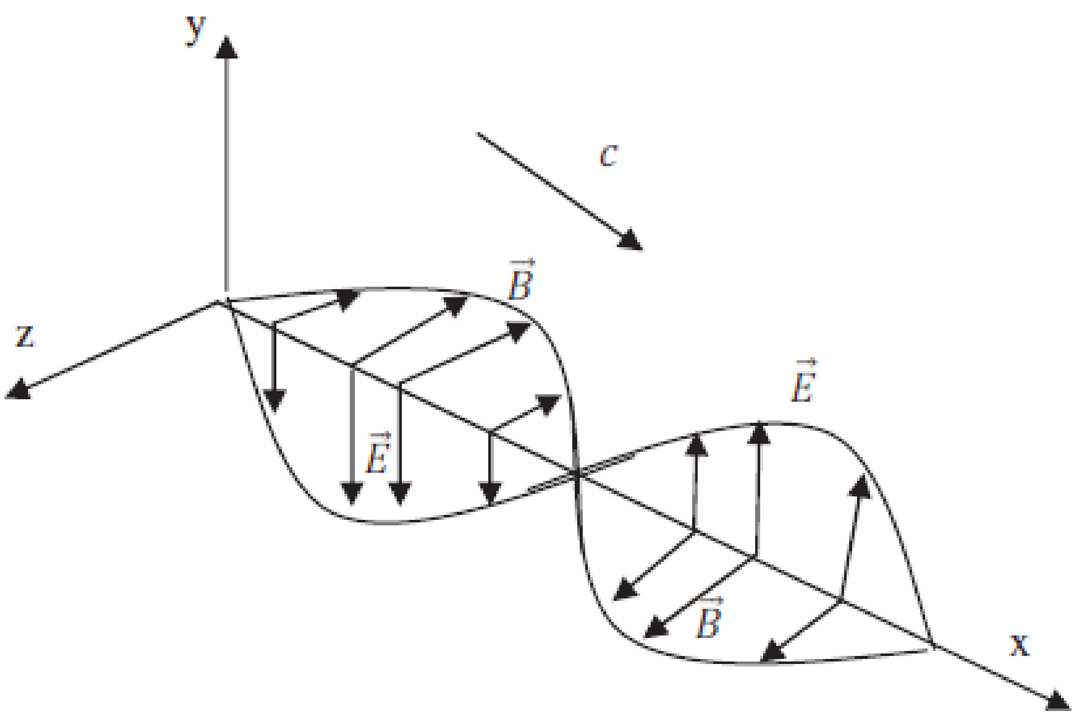
3-Dans le vide, L'OEM se propage à une vitesse c invariante $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3.8.10^8\ m/s$

4- Pour se propager, contrairement aux ondes mécaniques, l'onde EM n'a pas besoin d'un support matériel. Les ondulations de l'onde EM sont les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ eux-mêmes, les OEM sont des ondes de champs.

5.2.2 Ondes électromagnétiques planes sinusoïdales

Dans une OEM sinusoïdale :

- en tout point fixé de l'espace, $\vec{E}(x,t), \vec{B}(x,t)$ varient sinusoïdalement avec le temps t.
- et en tout temps t donné, les variations spatiales de $\vec{E}(x,t), \vec{B}(x,t)$ avec x sont aussi sinusoïdales.



Pour une onde OEM sinusoïdale se propageant le long de l'axe ox (voir figure ci-dessus) :

$$\vec{E}(x,t) = E_{max}\sin(wt - kx)\vec{e_y}$$

$$\vec{B}(x,t) = B_{max}\sin(wt - kx)\vec{e_z}$$

avec évidemment comme toute onde sinusoïdale :

f est la fréquence de l'onde ($f = \frac{w}{2\pi}$)en Hz

λ est la longueur d'onde en m (λ= $\frac{c}{f}$)

k est le nombre d'onde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$)

5.2.4. Vitesse de phase et vitesse de groupe

1-Vitesse de phase

C'est la vitesse de déplacement du plan d'onde, donc la vitesse $v_\emptyset$de propagation de la phase

$\emptyset = wt - kx$, soit $v_\emptyset = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{\emptyset=cst}$ $ou\ v_\emptyset = \frac{\omega}{k}$

2- Vitesse de groupe

Si la vitesse de phase dépend de la pulsation ω, le milieu est dispersif ; alors l'énergie de l'onde se propage à une vitesse v_g différente de $v_\emptyset$:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

5.2.5. Impédance caractéristique du milieu de propagation

Le rapport du champ électrique E sur le champ magnétique H a les dimensions d'une résistance.

$$Z_c = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Dans le vide $Z_c = 377\Omega$

5.2.6. Energie de Propagation

Considérons une OEM se propageant dans le vide (absence de milieu matériel) le long de l'axe Ox ;

La densité totale d'énergie instantanée d'une OEM est donnée par :

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(x,t) + \frac{1}{2\mu_0} B^2(x,t) = \frac{E(x,t).B(x,t)}{Z_c} \quad (\mathrm{J/m^3})$$

L'énergie portée par l'OEM, d'après le vecteur de Poynting :

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

En général, on cherche à connaître non pas la puissance instantanée mais la puissance moyenne temporelle notée $\langle S \rangle = \frac{1}{2Z_c} E_{max}^2 = \frac{1}{2\mu_0} c B_{max}^2$ si l'onde est sinusoïdale.

5.2.7. Représentation complexe de l'onde plane sinusoïdale

- ✓ Aux champs réels $\vec{E}$ et $\vec{B}$ de l'onde plane progressive sinusoïdale en M ($\overrightarrow{oM} = \vec{r}$)à l'instant t, on associe les champs complexes (avec $j^2 = -1$)

$\vec{E} = E_0 e^{j(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$ et $\vec{B} = B_0 e^{j(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$

Avec cette notation, l'application des opérateurs spatio-temporels est avantageuse :

$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$ et $\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \rightarrow jk$

Donc $\begin{cases} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = j\omega\vec{E} & div\vec{E} = -j\vec{k}\vec{E} \\ \overrightarrow{rot}\vec{E} = \nabla \wedge \vec{E} = -j\vec{k} \wedge \vec{E} & \Delta\vec{E} = -k^2 E \end{cases}$

5.3. Etats de polarisation de L'OEMPS

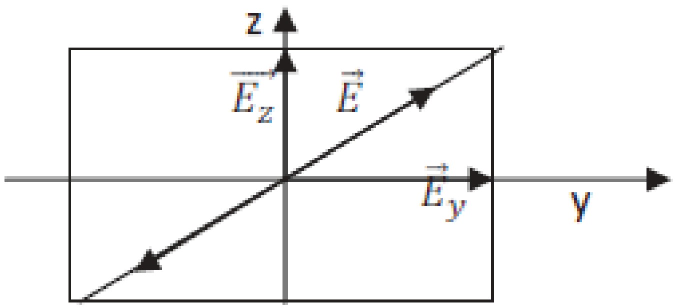
Pour une O.E.M.P.S de fréquence f et qui se propage suivant la direction ox, les composantes du champ électrique $\vec{E}$ dans le plan d'onde sont de la forme [9] :

$$E = \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_1 \cos(wt - kx + \varphi_1 \\ E_z = E_2 \cos(wt - kx + \varphi_2 \end{cases}$$

$$E_0 = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$$

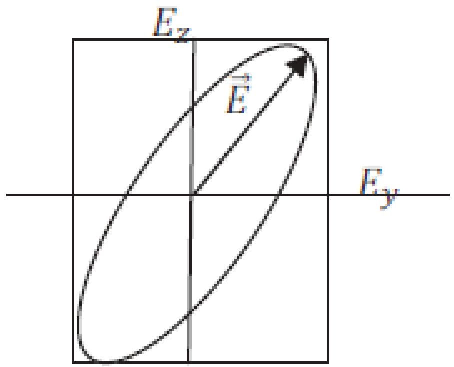
- Dans le plan d'onde $x = const$, l'extrémité du vecteur champ $\vec{E}$ décrit une courbe dont la forme dépend du déphasage $\varphi_2 - \varphi_1$ entre les composantes E_y et E_z de E:

✓ Si $\varphi_2 - \varphi_1 = 0\ ou\ \pi \Rightarrow \frac{E_y}{E_1} = \frac{E_z}{E_2}$, ce qui signifie que le champ $\vec{E}$ conserve une direction fixe : l'onde est dite polarisée **rectilignement**



- ✓ Si $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < 2\pi$:

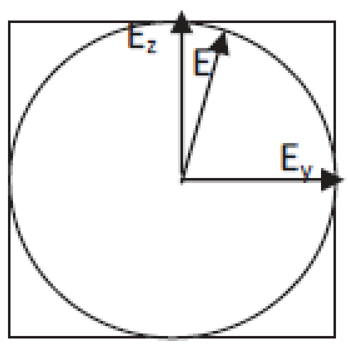
L'extrémité de $\vec{E}$ décrit une ellipse dans le plan d'onde et on dit que la polarisation est **elliptique**.



- ✓ Si $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ *ou* $\frac{3\pi}{2}$ et $E_z = E_y = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$:

$$E_y^2 + E_z^2 = E_1^2$$

L'extrémité de $\vec{E}$ décrit un cercle de rayon E_1 : on dit que la polarisation est **circulaire.**



5.4. Equation d'onde dans un milieu linéaire, homogène et isotrope

- **Champ électrique**

Partons des équations de maxwell dans un milieu linéaire ($\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \vec{B} = \mu\vec{H}$) et conducteur ($\vec{J} = \sigma\vec{E}$) :

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$div\vec{B} = 0$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{H} = \sigma\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

On prenant le rotationnel de l'équation de Maxwell Faraday :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{E}) = \overrightarrow{grad}div\vec{E} - \Delta\vec{E} = \overrightarrow{grad}\frac{\rho}{\varepsilon} - \Delta\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{rot}\,(\vec{B}) = -\sigma\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow\Delta\vec{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \sigma\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\frac{\rho}{\varepsilon}$$

- Champ magnétique

Des manipulations similaires de l'équation de Maxwell Ampère donnent

$$\Delta\vec{H} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \sigma\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \tag{5.12}$$

Les équations (5.11) et (5.12) sont les équations d'ondes pour les champs électrique et magnétique dans un MLHI.

- ✓ Les termes en $\mu\varepsilon$ proviennent du courant de déplacement $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$: non dissipatif car $\vec{J}_{déplacement}.\vec{E} = \vec{E}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$, ce qui correspond au taux de variation de l'énergie stockée sous forme électrique.
- ✓ Les termes en $\mu\sigma$ proviennent du courant de conduction $\sigma\vec{E}$: dissipatif car $\vec{J}_{cond}.\vec{E} = \sigma\vec{E}^2$, est la puissance dissipée par unité de volume par effet Joule

5.4.1. Propagation des OEMP dans les isolants

Pour un isolant $\rho = 0$ et $\sigma = 0 \Rightarrow$ l'équation (5.11) devient :

$$\Delta\vec{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \text{ et } \vec{E} = Ee^{j(\omega t - kz)}\vec{u}$$

Soit :

$$j^2k^2 - \varepsilon\mu(j^2\omega^2) = 0 \Rightarrow k = \pm\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

On prend le cas positif

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

Si $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\mu_r\varepsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}$ (la vitesse de propagation dans un MLHI)

$$v = \frac{c}{n}$$

Avec $n = \sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$ est l'indice de réfraction de milieu

Dans un milieu non magnétique $\mu_r = 1 \Rightarrow n = \sqrt{\varepsilon_r}$

Dans les isolants les vecteurs $\vec{E}$ *et* $\vec{H}$ sont en phase et les densités d'énergies électrique et magnétique sont égales.

5.4.2. Propagation des OPEM dans les conducteurs

Dans un milieu conducteur $\sigma \neq 0$ et $\rho = 0$

$$\Delta\vec{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \sigma\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$-k^2 + \varepsilon\mu\omega^2 - j\sigma\mu\omega = 0 \Rightarrow k^2 = \frac{\varepsilon_r\mu_r}{\lambda_0^2}\left(1 - j\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)$$

Avec $\lambda_0 = \frac{\lambda}{2\pi}$

La quantité $-j\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}$ représente le rapport entre la densité de courant de conduction et la densité de courant de déplacement.

On appel facteur de qualité du milieu Q le rapport :

$$Q = \frac{\left|\frac{\partial D}{\partial t}\right|}{|J_c|} = \frac{\omega\varepsilon}{\sigma}$$

5.5. Réflexion et transmission des ondes électromagnétiques

Lorsqu'une onde incidente rencontre une interface (changement de milieu (1) vers (2)), on observe trois ondes (figure suivante) :

Une onde incidente le long de la direction $\vec{u_i}$

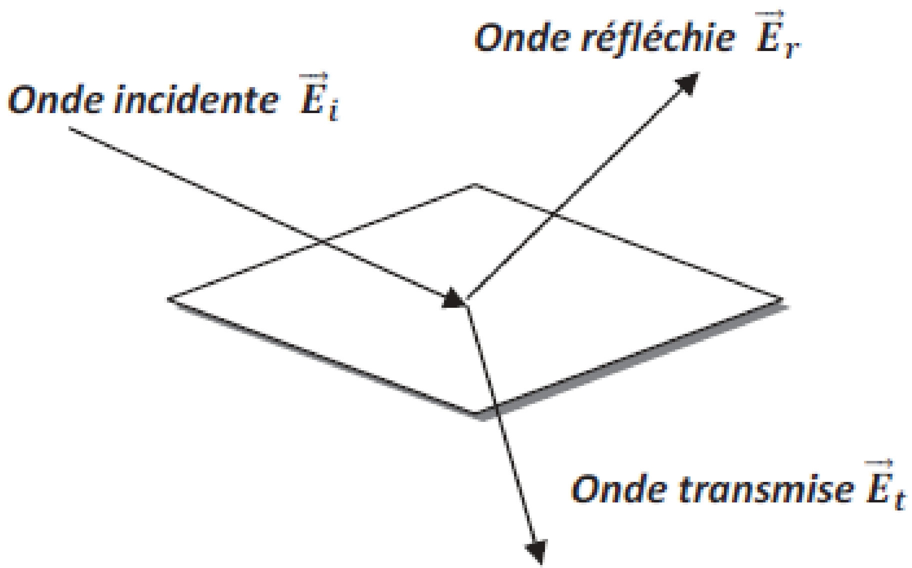
Une onde réfléchie le long de la direction $\vec{u_r}$

Une onde transmise le long de la direction $\vec{u_t}$

Ces trois ondes doivent satisfaire aux conditions de passage.

Exemple :

Onde sonore arrivante à un mur.



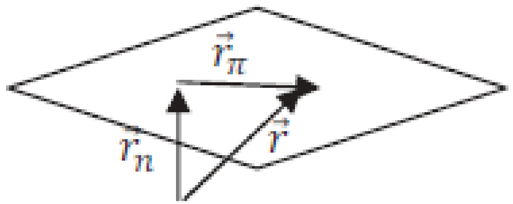
Les lois de la réflexion et les lois de réfraction :

1-Les trois vecteurs $\vec{E}_i$, $\vec{E}_r$, et $\vec{E}_t$ des ondes électromagnétiques sont incidente, réfléchie et transmise respectivement ont les mêmes fonction du temps.

Les ondes incidente, réfléchie et transmise sont donc du type:

$$\begin{cases} \vec{E}_i = E_{0i} e^{j(\omega t - \vec{k}_i \vec{r})} \\ \vec{E}_r = E_{0r} e^{j(\omega t - \vec{k}_r \vec{r})} \\ \vec{E}_t = E_{0i} e^{j(\omega t - \vec{k}_t \vec{r})} \end{cases}$$

2-Les trois vecteurs dépendent de la même façon de la position $\vec{r}_\pi$ à l'interface. La figure suivante montre la relation entre le vecteur position $\vec{r}$ et le vecteur d'interface $\vec{r}_\pi$.



$$\vec{r} = \vec{r}_\pi + \vec{r}_n$$

Les vecteurs ci-dessus peuvent être écrire sous la forme suivante :

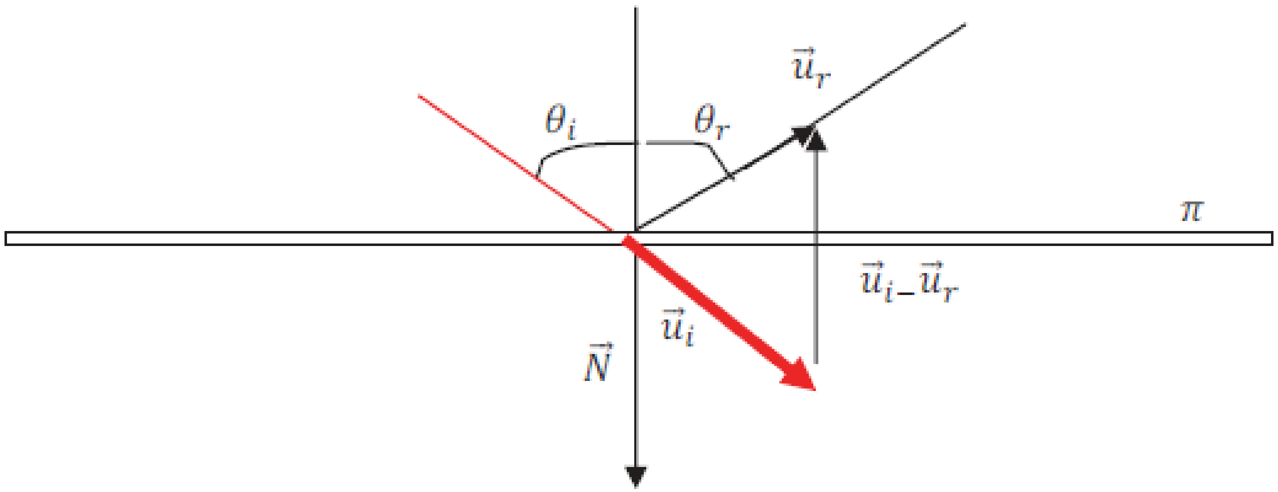
$$\vec{E}_i = E_{0i}e^{j(\omega t - \vec{k}_i\vec{r})} = E_{0i}e^{-\vec{k}_i\vec{r}_n}e^{j\omega t}e^{-j\vec{k}_i\vec{r}_\pi} = E_{0i}^{*}e^{j\omega t - j\vec{k}_i\vec{r}_\pi}$$

$r = r_\pi \in$ interface:

$$\vec{k}_i\vec{r}_\pi = \vec{k}_r\vec{r}_\pi = \vec{k}_t\vec{r}_\pi \Rightarrow (\overrightarrow{k_\iota} - \vec{k}_r)\vec{r}_\pi$$

Sachant que $|k_i|= v_i/w$ où v_i est la vitesse de phase de l'onde incidente et $\overrightarrow{u_\iota}$ le vecteur unitaire dans la direction de k_i, Donc :

Le vecteur $(\vec{u}_i - \vec{u}_t)$ est perpendiculaire à l'interface $\pi \Rightarrow \theta_i = \theta_t$ (la loi de réflexion) [10].

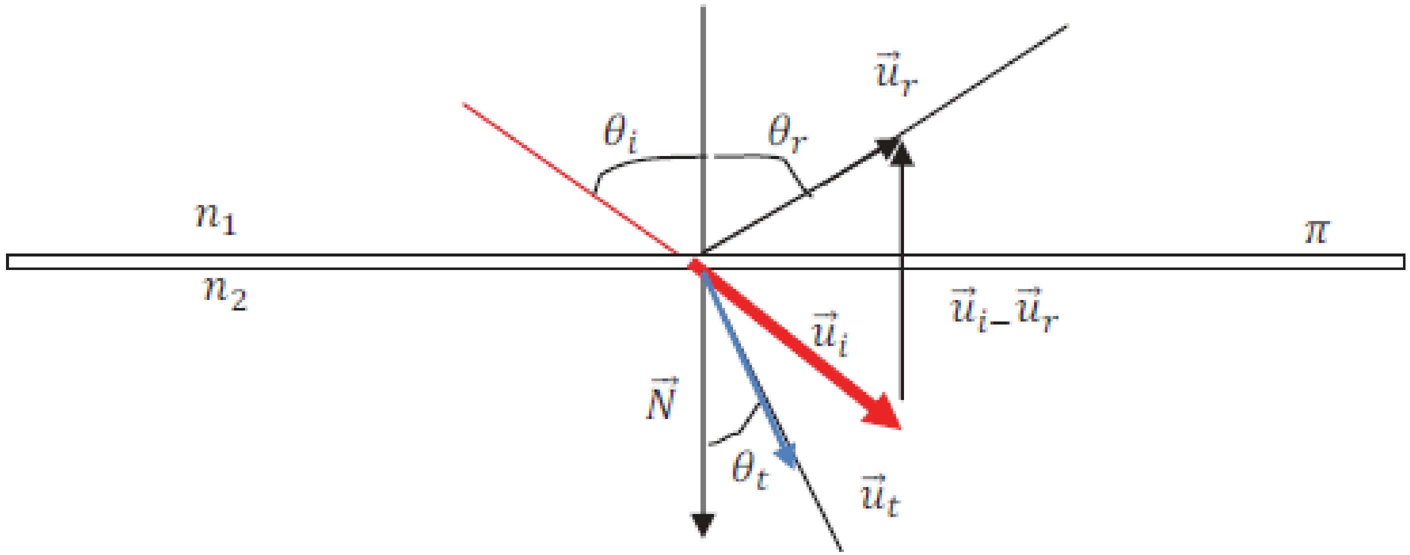


Les vecteurs $\vec{u}_i$, $\vec{u}_r$ et $\vec{N}$ définissent le ***plan d'incidence***.

La deuxième condition de l'équation d'invariance le long de l'interface peut être interprété en intégrant les indices de réfraction n_1 et n_2 des milieux comme indique la figure suivante:

$\vec{k}_i\vec{r}_\pi = \vec{k}_t\vec{r}_\pi \rightarrow n_1\vec{u}_i\vec{r}_\pi = n_2\vec{u}_t\vec{r}_\pi \Rightarrow n_1 \sin(\theta_i) = n_2 \sin(\theta_t)$

$$\frac{\sin(\theta_i)}{\sin(\theta_t)} = \frac{n_2}{n_1}$$



5.7. Spectre du rayonnement électromagnétique

Les ondes EM couvrent un spectre très large en longueur d'onde et en fréquence. Le tableau suivant donne une portion importante du spectre :

	Fréquence (Hz)	longueur d'onde (m)
Onde radio et TV	$10\text{-}10^{9}$	10^3-0.3
Les micro-ondes	$10^{9}\text{-}3.10^{11}$	$0.3\text{-}10^{-3}$
infrarouge	$3.10^{11}\text{-}7.8.10^{14}$	$10^{-3}\text{-}7.8.10^{-7}$
la lumière visible	$4.10^{14}\text{-}8.10^{14}$	$7.8.10^{-7}\text{-}3.8.10^{-7}$
ultraviolets	$8.10^{14}\text{-}3.10^{17}$	$3.8.10^{-7}\text{-}6.10^{-10}$
les rayons X	$3.10^{17}\text{-}5.10^{19}$	$10^{-9}\text{-}6.10^{-12}$
rayons γ	$3.10^{18}\text{-}5.10^{22}$	$10^{-10}\text{-}10^{-14}$

Le spectre de la lumière visible :

Longueur d'onde (nm)	Couleur
400 -440	violet
440 - 480	bleu
480 - 560	vert
560 -590	jaune
590 - 630	orange
630 -700	rouge
<400	ultraviolet
>700	infrarouge