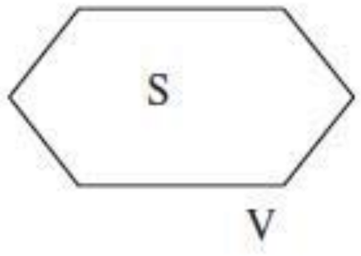
Chapitre 4

Régime variable et équations de Maxwell

4.1. Théorème d'Ampère et Equation de Continuité

Soit une charge Q contenue dans un volume V délimité par une surface S.



$$Q = \iiint \rho dV \tag{4.1}$$

s'il y a variation de la charge en fonction du temps on écrit :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad et \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = -\oiint \vec{J}\overrightarrow{ds} = -\iiint div\,\vec{J} dV \quad \Rightarrow div\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{4.2}$$

$div\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$(Equation de continuité)

$div\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$(Equation de continuité)

L'équation de continuité traduit la conservation de la charge : le taux de déplacement de charges vers l'extérieur d'une région est égal à la décroissance temporelle de la charge contenue dans la région. Ainsi, Maxwell postula que

$$\overrightarrow{rot}\vec{H} = \vec{J_c} + \vec{J_D} \qquad (4.3)$$

Où $\vec{J_c}$ est le courant de conduction et $\vec{J_d}$ est le courant de déplacement.

$div(\overrightarrow{rot}\vec{H}) = div(\vec{J_c} + \vec{J_D})$=0 $\Rightarrow div(\vec{J_c}) = -div(\vec{J_D}) = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$, d'après l'équation de Maxwell Gauss ($\rho = div\vec{D}$), nous aurons :

$-div\vec{J_c} = -\frac{\partial div\vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \vec{J_D} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

Les deux dernières équations donnent alors la forme locale de l'équation de Maxwell Ampère modifie :

$$\overrightarrow{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \qquad (4.4)$$

4.2. Les équations de Maxwell

4.2.1 Expression et interprétation physique

Equation de Maxwell-Gauss

$$div\vec{D} = \rho_{libres} \tag{4.5}$$

Cette équation relie le champ électrique à ses sources. Sa forme intégrale est :

$$\iiint div\,\vec{D}dv = \oiint \vec{D}\overrightarrow{ds} = \iiint \rho_{libres}\,dv \tag{4.6}$$

Cette équation montre que le champ électrique peut lui diverger à partir de points où se trouvent des charges électriques. Le « théorème de Gauss » est donc vrai en régime variable

Equation du flux magnétique

$$div\vec{B} = 0 \tag{4.7}$$

Cette équation est indépendante des sources. Sa forme intégrale, obtenue en écrivant :

$$\oiint \vec{B}\,\overrightarrow{ds} = 0 \tag{4.8}$$

Interprétation physique : Le flux de $\vec{B}$ à travers toute surface fermée est nul, ce la veut dire qu'il y a conservation du flux, $\vec{B}$est un vecteur à flux conservatif.

Equation de Maxwell-Ampère

$$\overrightarrow{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{4.9}$$

Cette équation relie le champ magnétique à ses sources et au champ électrique. Sa forme intégrale est :

$$\oiint \overrightarrow{rot}\vec{H}\overrightarrow{ds} = \oint \vec{H}\,\overrightarrow{dl} = \oiint \vec{J}\overrightarrow{ds} + \oiint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\overrightarrow{ds} \tag{4.10}$$

En régime stationnaire, nous retrouvons le théorème d'Ampère qui montre que le champ $\vec{H}$ tourne autour des courants. Le terme supplémentaire en $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ indique qu'un champ électrique variable est source de champ magnétique [8].

Equation de Maxwell-Faraday

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{4.11}$$

Cette équation est indépendante des sources. Sa forme intégrale est:

$$\oiint \overrightarrow{rot}\vec{E}\overrightarrow{ds} = \oint \vec{E}\overrightarrow{dl} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint \vec{B}\overrightarrow{ds} \tag{4.12}$$

Cette équation décrit tous les phénomènes d'induction et montre qu'un champ magnétique variable peut créer un champ électrique à circulation non nulle.

4.2.2. Equations de Maxwell dans un milieu linéaire homogène et isotrope (MLHI)

Dans un milieu linéaire homogène et isotrope :

$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ (Relation électrique)

$\vec{B} = \mu \vec{H}$ (Relation magnétique)

$$div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$div\,\vec{B} = 0$$

$$\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu \vec{J} + \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

4.3. Loi d'Ohm

On suppose qu'il n'y a que le champ électrique $\vec{E}$

on applique le principe fondamental de la dynamique à un porteur de charge q, animé d'une vitesse d'ensemble $\vec{v}$.

Ce porteur est soumis

-à une force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$

-à une force de frottement $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$

A l'équilibre

$\vec{F} + \vec{f} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \frac{e\vec{E}}{\lambda}$

En introduisant le vecteur densité de courant $\vec{J} = \rho\vec{v}$ avec $\rho = nq$ densité volumique de charges (n densité volumique de porteurs de charges) on a :

$\vec{J} = \frac{nq^2}{\lambda}\vec{E} = \sigma\vec{E}$ La loi d'Ohm locale

Avec $\frac{nq^2}{\lambda} = \sigma$ est la conductivité électrique du milieu

4.4. Théorème de conservation de l'énergie et vecteur de Poynting

4.4.1. Théorème de Poynting

On défini le vecteur de Poynting $\vec{S}$ par la relation suivante :

$$\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H} \tag{4.13}$$

avec $\vec{E}$ est le champ électrique et $\vec{H}$ est le champ magnétique

En calculant la divergence du vecteur de Poynting :

$$div\vec{S} = div\left(\vec{E} \wedge \vec{H}\right) ?$$

$div(\vec{E} \wedge \vec{H}) = \vec{H}.(\vec{rot}\,\vec{E}) - \vec{E}.(\vec{rot}\,\vec{H})$, et en utilisant les deux équations de Maxwell en rotationnel, on a

$$div(\vec{E} \wedge \vec{H}) = -\vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E}.\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{J}.\vec{E}$$

Pour un système LHI ($\vec{B} = \mu \vec{H}$ et $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$) , on obtient

$$div(\vec{S}) = div(\vec{E} \wedge \vec{H}) = -\frac{1}{2}\frac{\partial(\vec{H}.\vec{B} + \vec{E}.\vec{D})}{\partial t} - \vec{J}.\vec{E}\,.$$

L'intégration sur un volume V arbitraire délimité par une surface s et le théorème de la divergence nous permettent alors d'écrire le théorème de conservation suivant :

$$\underbrace{-\frac{d}{dt}\iiint\left(\frac{\vec{H}.\vec{B}}{2}+\frac{\vec{E}.D}{2}\right)dv}_{\boxed{1}} = \underbrace{\iint\left(\vec{E}\wedge\vec{H}\right)\vec{ds}}_{\boxed{2}} + \underbrace{\iiint \vec{J}.\vec{E}}_{\boxed{3}} \qquad (4.14)$$

1- Représente la diminution d'énergie EM dans V, 2- représente le flux de S et 3- Représente l'énergie dissipée par effet joule.

où $\frac{\vec{E}.\vec{D}}{2}$ représente l'énergie emmagasinée par unité de volume sous forme électrique, $\frac{\vec{H}.\vec{B}}{2}$ représente l'énergie emmagasinée par unité de volume sous forme magnétique et $\vec{J}.\vec{E}$ représente la puissance dissipée par unité de volume (effet joule)

Interprétation du théorème de Poynting

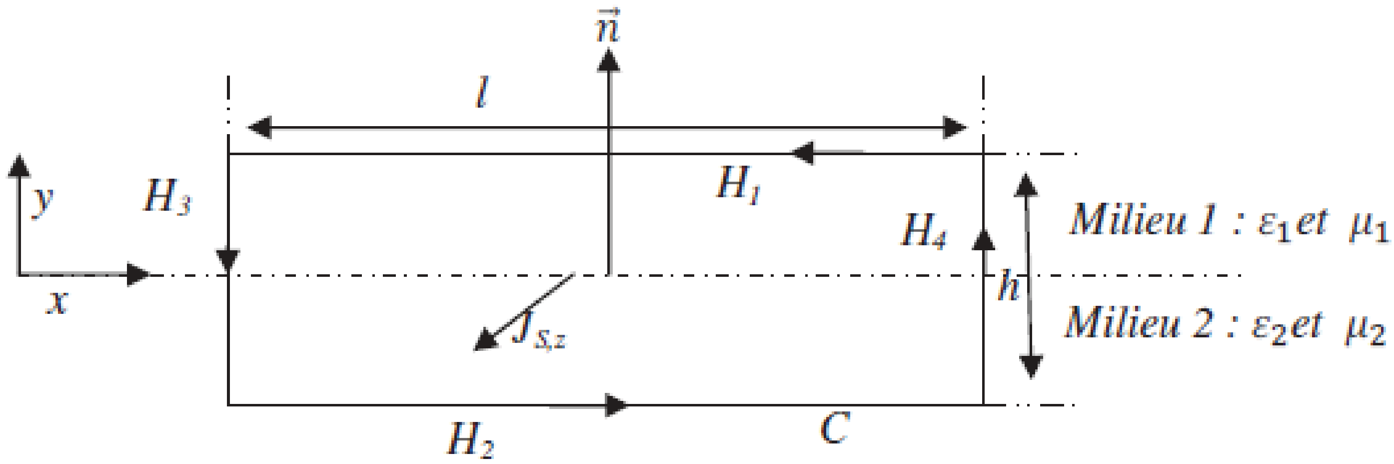
Taux de diminution d'énergie EM emmagasiné= flux d'énergie EM traversant la surface S+puissance dissipée par effet Joule .

4.5. Conditions aux limites

Composantes tangentielles de H

- On part de l'équation de Maxwell Ampère (équation 4.9), puis par le théorème de Stokes :

$$\oint \vec{H}.\vec{dl} = \oiint \vec{J}\vec{dS} + \frac{d}{dt}\oiint \vec{D}\,\vec{dS}$$



où C est le contour rectangulaire de la figure au dessus

Pour l et h petits, donne :

$$(H_{2t} - H_{1t})l + (H_{4n} - H_{3n})h = lh.\left(J_{moyen,z} + \frac{d}{dt}D_{moyen,z}\right)$$

Si $h \to 0$ et en posant $J_{S,z} = lim_{h\to 0}\, h.J_{moyen,z}$, on aura :

$$(H_{2t} - H_{1t}) = J_{S,z} \Rightarrow \vec{n} \wedge \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right) = \vec{J}_S$$

où $\vec{J}_s$ représente la densité surfacique de courant (unité : A/m) et $\vec{n}$ le vecteur de l'interface séparant les milieux 1 et 2.

<u>Composantes normales de $\vec{D}$</u>

On part de l'équation de Maxwell Gauss électrique (4.6)(forme intégrale), puis par le théorème de la divergence :

$$\oiint_S \vec{D}\vec{ds} = \iiint_V \rho dv$$

où S est la surface du parallélépipède rectangle de la figure suivante, ses dimensions sont $h.\omega.l$ et S contient six faces

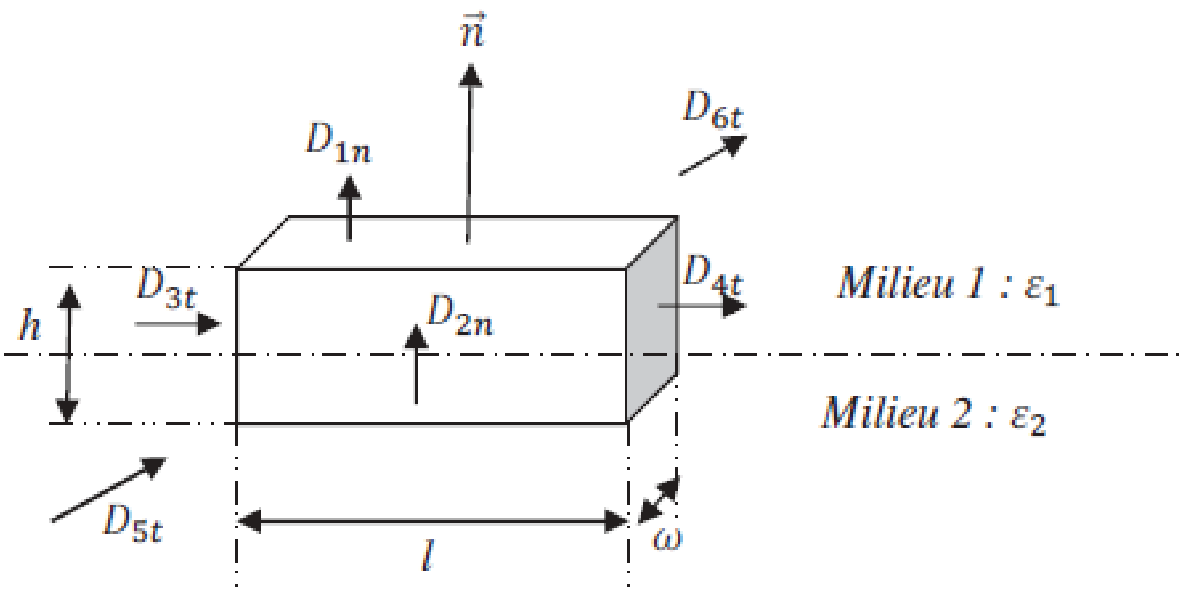
Pour h, l et ω petits, donne :

$$(D_{1n} - D_{2n})l\omega + (D_{4t} - D_{3t})h\omega + (D_{6t} - D_{5t})hl \approx hl\omega\rho_{moyen}$$

Si $h \to 0$ et en posant $\sigma_S = lim_{h\to 0}\, h.\rho_{moyen}$, on aura :

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma_S \Rightarrow \vec{n}.\left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right) = \sigma_S$$

Où σ_S représente la densité surfacique de charge.



Conditions aux limites : résumé

1- Composante tangentielle de $\vec{H}$: $\vec{n} \wedge (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_S$

2- Composante tangentielle de $\vec{E}$: $\vec{n} \wedge (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$

3- Composante normale de $\vec{D}$: $\vec{n}.(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma_S$

4- Composante normale de B : $\vec{n}.(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$

Remarque

Ces conditions sont valables aussi pour des champs constants que pour des champs variables dans le temps.