Chapitre 2 du cours : Théorie du champ électromagnétique

Dr. DAFRI Mourad

Septembre 2024

Table des matières

I - Chapitre 2 : Magnétostatique 3

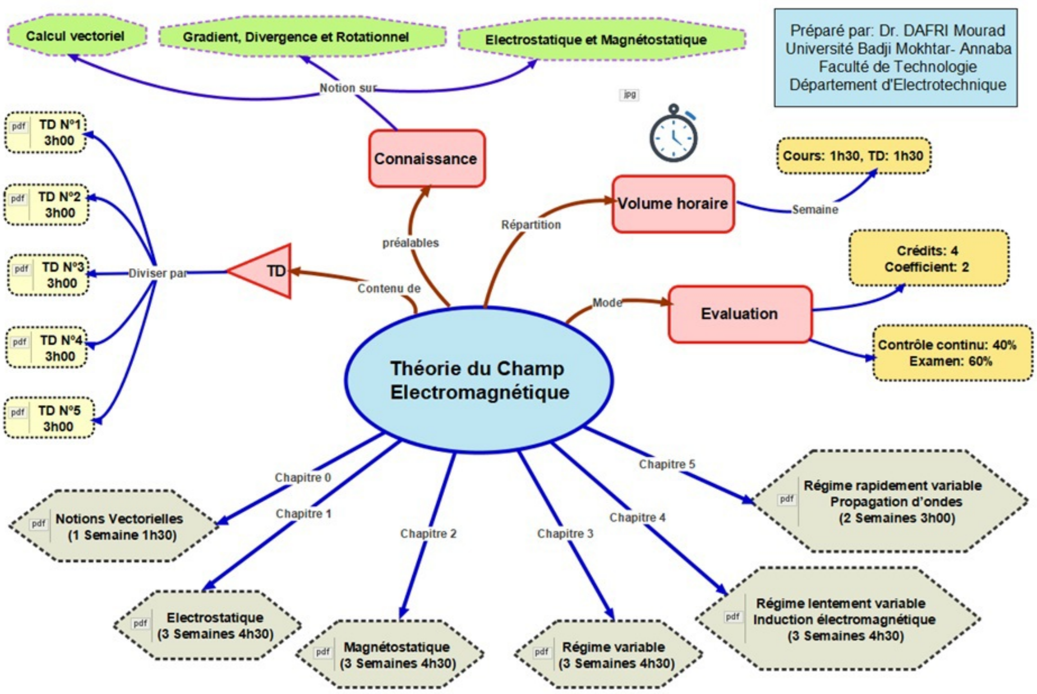
1. Objectifs du chapitre 3
2. Prérequis 4
3. Exercice 4
4. Exercice 4
5. Introduction 4
6. Définition 5
7. Calcul du champ d'induction magnétique 6
   - *7.1. Loi de Biot et Savart* 6
   - *7.2. Loi (ou théorème) d'Ampère* 7
8. Conservation du flux magnétique 7
   - *8.1. Loi de Gauss magnétique* 7
9. Potentiel vecteur magnétique 9
10. Loi de Biot est Savart et potentiel vecteur magnétique 9
11. Expression local du théorème d'Ampère 10
12. Equation de Poisson magnétique 10
13. Force de Lorentz 11
14. Matériaux magnétiques 12
   - *14.1. Définition matériau magnétique* 12
   - *14.2. Relation entre Le champ d'induction magnétique H et le champ magnétique B* 13
   - *14.3. Classification des milieux magnétiques* 13
   - *14.4. Cycle d'hystérésis* 14
   - *14.5. Classification des matériaux ferromagnétiques* 15
15. Exercice 16
16. Exercice 16
17. Références bibliographiques 16

Chapitre 2 : Magnétostatique

I

1. Objectifs du chapitre

- Identifier et mémoriser les concepts clés de la magnétostatique, y compris les sources de champs magnétiques, les courants stationnaires, et les lois fondamentales associées.
- Expliquer les phénomènes magnétostatiques et les relations entre les courants stationnaires et les champs magnétiques générés.
- Appliquer les lois de la magnétostatique pour résoudre des problèmes concrets impliquant des champs magnétiques générés par des courants stationnaires.
- Analyser des situations impliquant des champs magnétiques et des matériaux magnétiques, et déterminer les contributions individuelles des différentes sources de champs magnétiques.
- Combiner les concepts de la magnétostatique avec d'autres notions physiques pour modéliser des système magnétiques complexes.
- Juger de la pertinence des approximations utilisées dans les calculs magnétostatiques et évaluer la précision des résultats obtenus.



2. Prérequis

les étudiants doivent avoir une bonne maîtrise des concepts et compétences suivants :

- Comprendre les opérations sur les vecteurs, telles que l'addition, la soustraction, le produit scalaire et vectoriel. Savoir manipuler les champs vectoriels et calculer les dérivées et intégrales de fonctions vectorielles.
- Savoir calculer la divergence et le rotationnel d'un champ vectoriel. Comprendre la signification physique de ces opérateurs dans le contexte des champs électriques et magnétiques.
- Comprendre les concepts de base de l'électrostatique, y compris la loi de Coulomb, le champ électrique, l potentiel électrique, et les équations de Maxwell en régime électrostatique.
- Comprendre les principes de base des circuits électriques, y compris la loi d'Ohm, les lois de Kirchhoff, e le comportement des composants électriques tels que les résistances, les inductances, et les sources de courant.

Aide à pré-requis (en cas d'échec)

https://books.google.dz/books?id=12DvEAAAQBAJ&printsec=frontcover&dq=livre+sur+notion+et+introduction+a+magnetostatique&hl=fr&

3. Exercice

Si un champ vectoriel B a un rotationnel nul, c'est-à-dire$\nabla\times B=0$, alors lequel des énoncés suivants est vrai ?

- [ ] La divergence de B est nécessairement nulle
- [ ] B est un champ conservatif.
- [ ] B est un champ de potentiel
- [ ] B est constant partout

4. Exercice

Une charge ponctuelle Q=4 μC est située à une distance de 0,3m d'un point A dans le vide. Quel est le potentiel électrique (en Volts) en ce point A ?

(Indication : constante de Coulomb k_e=8,99×109 N·m^2/C^2)

5. Introduction

Comme le nom du chapitre l'indique, nous allons étudier l'ensemble des phénomènes magnétiques tout d'abord en absence de matière (dans le vide) et en ne considérant que les champs magnétiques ne variant pas dans le temps, c'est-à-dire constant.

6. Définition

Le champ d'induction magnétique B traduit l'effet du déplacement des charges électriques (un courant I).

7. Calcul du champ d'induction magnétique

7.1. Loi de Biot et Savart

En un point P de l'espace, l'élément de conducteur dl, parcouru par I, génère un champ d'induction magnétique élémentaire db.

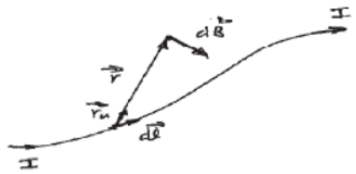
$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\overrightarrow{dl} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$$

où dl: longueur du circuit soumis au courant I, orienté dans le sens de I.

r : distance de l'élément dl au point d'expression de l'induction db.

μ_0: Perméabilité magnétique du vide ($\mu_0 = 4\pi.\ 10^{-7}$).

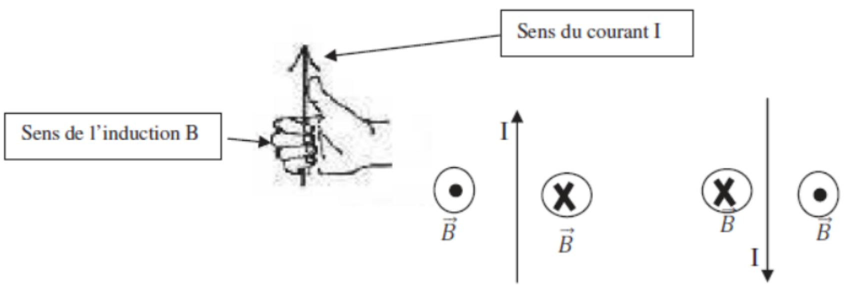
L'induction ??? s'exprime en Tesla (B/T).



Le sens de dB est donné par la règle du tire-bouchon (ou la règle de la main droite). La direction de dB, est donnée par le produit vectoriel

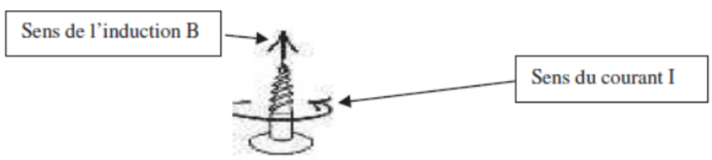
$$\overrightarrow{dl} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

- La main droite



Exemple : Fil rectiligne

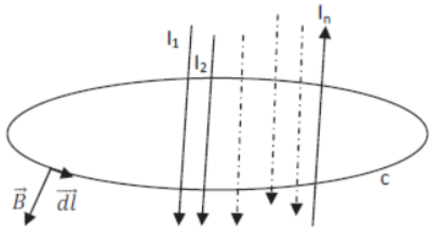
- Règle du tire bouchon



Exemple : Spire

7.2. Loi (ou théorème) d'Ampère

Considérons n conducteurs I_1, I_2,..., I_n dans l'espace et un contour fermé c entourant ces n conducteurs.



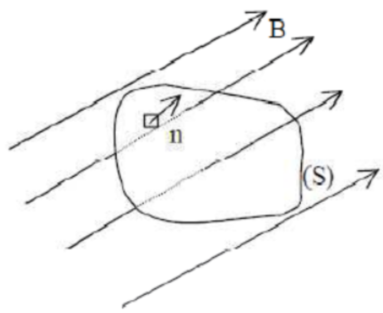
La circulation du vecteur d'induction B le long d'une courbe fermée c est égale à la somme algébrique des courants traversant la surface s'appuyant sur le contour c.

$$\oint \vec{B}\,.\,\vec{dl} = \mu_0 \sum_{i=1}^{n} I_i$$

Remarque : La loi d'Ampère est simple à utiliser et permet de calculer le champ B lorsque la forme des lignes de champ d'induction peut être déterminée par symétrie. Le contour fermé l doit avoir une position simple (tangent ou perpendiculaire) par rapport aux lignes de champ. Souvent, le contour l représente lui-même une ligne de champ d'induction.

8. Conservation du flux magnétique

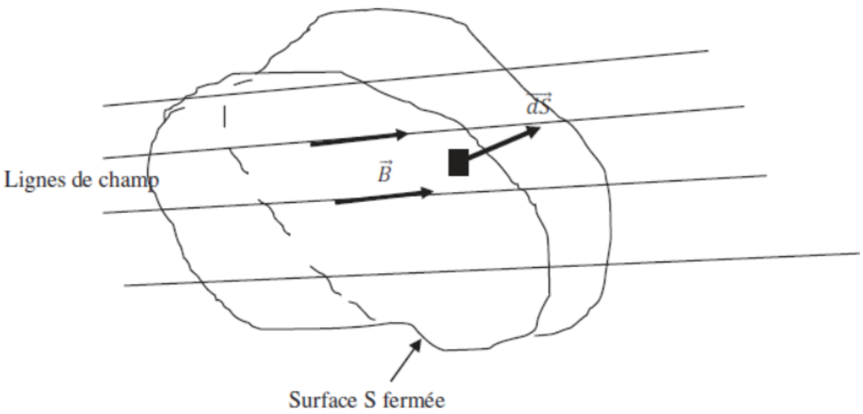
Le flux du vecteur d'induction magnétique B à travers une surface fermée (S) est définie par :



$$\varphi(\vec{B}) = \oiint \vec{B}\vec{ds}$$

8.1. Loi de Gauss magnétique

Considérons une surface S fermée (c'est-à-dire comprenant un volume) plongée dans un champ d'induction magnétique B.



La loi de Gauss du magnétisme s'exprime par :

$$\varphi(\vec{B}) = \oiint \vec{B}\vec{ds} = 0$$

Le flux magnétique net traversant une surface fermée est nul

Question : Montrer que div B =0 ?

D'après la loi de Biot est savart

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\overrightarrow{dl} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \overrightarrow{dl} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$div\vec{B} = div\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \overrightarrow{dl} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int div(\overrightarrow{dl} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3})$$

$$div\left(\overrightarrow{dl} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \frac{\vec{r}}{r^3}\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{dl} - \overrightarrow{dl}\,\overrightarrow{rot}\frac{\vec{r}}{r^3}$$

On a :

$$\frac{\vec{r}}{r^3} = -\overrightarrow{grad}\frac{1}{r}$$

Donc :

$$div\left(\overrightarrow{dl} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \frac{\vec{r}}{r^3}\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{dl} - \overrightarrow{dl}\,\overrightarrow{rot}(-\overrightarrow{grad}\frac{1}{r})$$

$$\overrightarrow{dl}\,\overrightarrow{rot}\left(-\overrightarrow{grad}\frac{1}{r}\right) = 0$$

(car le rotationnel d'un gradient est toujour égale à zero)

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{dl} = 0$$

(car dl est un vecteur fixe donc son rotationnel est nul).

On obtient :

div B= 0 (Equation de Maxwell Gauss magnétique)

Le flus de B est un flux conservatif.

9. Potentiel vecteur magnétique

On a :

$$div\,\vec{B} = div\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = 0$$

(divergence d'un rotationnel est toujours egale à zero)

$$div(\vec{B} - \overrightarrow{rot}\vec{A}) = 0 \Rightarrow \ \vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A}$$

A est appelé potentiel vecteur magnétique

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A}$$

L'induction magnétique B derive d'un potentiel vecteur magnétique

Remarque :

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A}$$

si on pose

$$\vec{A} = \vec{C} + \overrightarrow{grad}f \Rightarrow \vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A} = \overrightarrow{rot}\vec{C} \Rightarrow \vec{A}$$

n'est pas unique

On stationnaire on ajoute la jauge de Coulomb div A =0 pour assuré l'unicité de A.

En régime stationnaire on a :

$$\begin{cases} div\vec{B} = 0 \\ \vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A} \\ div\vec{A} = 0 \end{cases}$$

10. Loi de Biot est Savart et potentiel vecteur magnétique

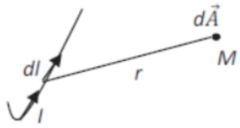
Montrer que :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\vec{dl}}{r} \ ?$$

Comme

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A}$$

il vient que ;



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\vec{dl} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} \Rightarrow d(\overrightarrow{rot}\vec{A}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\vec{dl} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} = \overrightarrow{rot}(d\vec{A})$$

On a $\frac{\vec{r}}{r^3} = -\overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{r}\right)$ soit $\overrightarrow{rot}(d\vec{A}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{r}\right) \wedge \vec{dl}$ alors

$$\overrightarrow{rot}(d\vec{A}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\overrightarrow{rot}\frac{\vec{dl}}{r} - \frac{1}{r}\overrightarrow{rot}\vec{dl}\right)$$

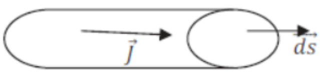
Comme $\vec{dl}$ est un vecteur fixe $\Rightarrow \overrightarrow{rot}\vec{dl} = 0$

Donc
$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\vec{dl}}{r}$$

11. Expression local du théorème d'Ampère

On définit la densité de courant J par :

$$J = \frac{I}{S}\,[\mathrm{A/m^2}]$$



Ou bien plus généralement :

$$I = \oiint \vec{J}\vec{ds}$$

Le champ d'induction magnétique d'un conducteur cylindrique est donné par :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \vec{J} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}dv.$$

$$\oint \vec{B}\vec{dl} = \mu_0 \sum I,$$

$$\oint \vec{B}\vec{dl} = \oiint \overrightarrow{rot}\vec{B}\vec{ds} = \mu_0 \iint \vec{J}\vec{ds}.$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{J}$$

Cette équitation est dite équation de Maxwell Ampère en stationnaire

12. Equation de Poisson magnétique

On a :

$$div\vec{B} = 0$$
$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A}\cdot$$
$$div\vec{A} = 0$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{J}\ ,\ \vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A}, \Rightarrow \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{A}) = -\Delta\vec{A} = \mu_0\vec{J}$$

13. Force de Lorentz

Force exercée sur une charge test ponctuelle q se déplaçant à la vitesse v dans un champ d'induction magnétique B:

$$\overrightarrow{F_{mag}} = q(\vec{v} \wedge \vec{B})$$

En présence d'un champ électrique et d'un champ d'induction magnétique (Force de Lorentz)

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_{mag}} + \overrightarrow{F_{el}} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Force magnétique s'exerçant sur un élément de conducteur parcouru par un courant I : si λ est la densité en (C /m) des charges se déplaçant à la vitesse v, on a

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\lambda \Delta l}{\Delta t} = \frac{\lambda v \Delta t}{\Delta t} = \lambda v.$$

Par

conséquent

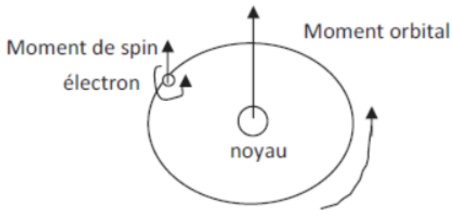
$$\overrightarrow{F_{mag}} = \int (\vec{v} \wedge \vec{B}) dq = \int (\vec{v} \wedge \vec{B})\, \lambda\, \mathrm{dl} \Rightarrow \quad \overrightarrow{F_{mag}} = \int I(\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B})$$

14. Matériaux magnétiques

14.1. Définition matériau magnétique

Les matériaux magnétiques sont des matériaux qui ont la propriété de présenter un moment d'aimantation sous l'influence d'un champ magnétique d'excitation extérieur.

- Aimantation et Moment magnétique
  Pour expliquer le concept de l'aimantation, il est nécessaire de passer à l'échelle atomique et de définir le moment magnétique atomique. Considérant un matériau comme un ensemble d'atome



Chaque atome possède un moment atomique, contribution d'un moment orbital et d'un nmoment de spin.

- Le moment orbital d'un atome résulte de la rotation de ses électrons autour du noyau.
- Le moment de spin d'un atome résulte de la rotation de ses électrons sur eux-mêmes.

Le moment magnétique atomique total d'un matériau est la somme vectorielle de tous ses moments magnétiques atomiques. Le moment magnétique m d'un matériau constitué de n atomes s'exprime alors ainsi :

$$\vec{m} = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_i$$

- Aimantation

L'aimantation magnétique est la quantité de moment magnétique atomique par unité de volume

$$\vec{M} = \frac{\vec{m}}{V} \text{ [A/m]}$$

où M est l'aimantation magnétique et V est le volume.

14.2. Relation entre Le champ d'induction magnétique H et le champ magnétique B

14.2.1. Définition champ d'excitation magnétique H

Le champ magnétique H(A/m) rend compte de l'influence du milieu magnétique sur les grandeurs. Son rotationnel ne dépend que des sources externes de courant.

La loi d'Ampère donne :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{J}_{tot}$$
$$\vec{J}_{tot} = \vec{J}_{app} + \vec{J}_{mag}$$

où J_{app} est dû à une éventuelle source externe de courant et J_{mag} est associé à l'aimantation du matériau (courants microscopiques).

$$rot\,\vec{H} = \vec{J}_{app}$$
$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$$

La relation entre l'aimantation magnétique M et les courants J_{mag} donnée par :

$$rot\,\vec{M} = \vec{J}_{mag}$$

Dans un milieu magnétique linéaire homogène et isotrope

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

où X_m est la susceptibilité magnétique

Dès lors

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}$$
$$\Rightarrow \vec{B} = \mu \vec{H}$$

où $\mu = \mu_0 (1 + X_m)$ est la perméabilité magnétique du milieu. On écrit aussi

$\mu = \mu_0 \mu_r$

où $\mu_r = (1 + X_m)$ est la perméabilité relative du milieu.

On classifiera les matériaux magnétiques suivant la valeur de leur susceptibilité magnétique X_m.

14.3. Classification des milieux magnétiques

$X_m < 0$ Milieux diamagnétiques

La susceptibilité X_m est faible et de valeur négative. H et M sont donc de sens contraire (cuivre, plomb, silicium).

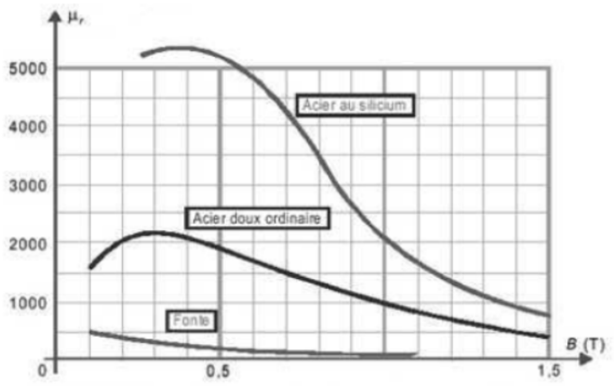
$X_m > 0$ Milieux paramagnétiques

La susceptibilité ua est faible et de valeur positive. H et M sont de sens identique (par exemple : aluminium, tungstène, platine).

X_m>> 0 Milieux ferromagnétiques

La susceptibilité V est grande. Ces matériaux sont essentiels pour l'électrotechnique.

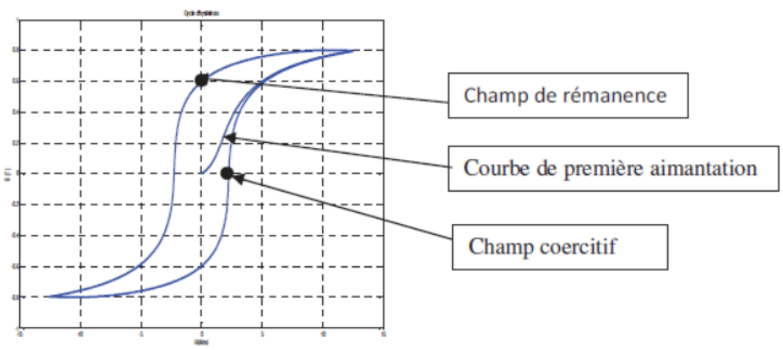
Ils se basent sur l'utilisation du Fer, Cobalt, Nickel et leurs alliages. La courbe ci-dessous donne un ordre de grandeur et l'évolution de la perméabilité relative pour trois matériaux ferromagnétiques en fonction du champ magnétique B qui les traversent.



Source : Introduction aux circuits magnétiques

14.4. Cycle d'hystérésis

On appelle cycle d'hystérésis (la courbe B(H)) d'un matériau le relevé de l'induction B qu'il génère alors soumis à un champ magnétique H que l'on fait varier.

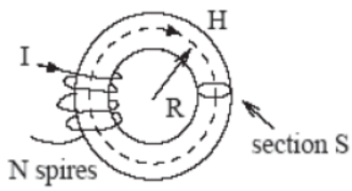


Conséquence :

Il subsiste une induction rémanente Br lorsque l'on annule l'excitation. Si l'on souhaite annuler B, il faut inverser le champ d'excitation H, on appelle la valeur de ce champ le champ coercitif Hc.

Remarque : l'hystérésis magnétique = retard du à la dynamique des domaines magnétiques

14.4.1. Energie dissipée par cycle

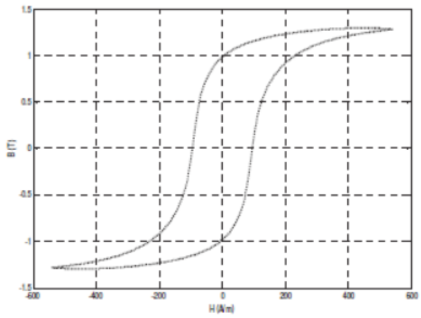


D'après le théorème Ampère

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{H} = \vec{J}_{app} \Rightarrow \oint \vec{H}.\vec{dl} = NI$$

Et par la loi de Faraday. on obtient l'énergie électrique fournier par cycle

$$E_{éle} = \oint NVIdt = \oint N\frac{dB.S}{dt}\frac{H(2\pi R)}{N}dt = 2\pi RS\oint HdB$$



Energie dissipée par le matériau par unité de volume et par cycle:

$$E_{dissipée} = \frac{E_{éle}}{V} = \oint HdB$$

14.5. Classification des matériaux ferromagnétiques

L'observation du cycle d'hystérésis permet de regrouper les matériaux ferromagnétiques en deux catégories :

1-Matériaux ferromagnétiques doux :

Br plutôt élevée

Hc plutôt faible

Surface du cycle d'hystérésis faible

2-Matériaux ferromagnétiques durs :

Br plutôt faible

Hc plutôt élevée

Surface du cycle d'hystérésis élevée

15. Exercice

La loi de Biot-Savart est utilisée pour calculer

- [ ] La force électrique entre deux charges ponctuelles
- [ ] Le champ électrique créé par une charge ponctuelle
- [ ] Le champ magnétique créé par un courant dans un fil conducteur
- [ ] Le flux magnétique à travers une surface

16. Exercice

Un fil conducteur rectiligne et infiniment long est parcouru par un courant de $I=10\,A$. Calculez le champ magnétique B, en Tesla, à une distance de $r=0{,}02\,m$ du fil.

17. Références bibliographiques

1. Rosnel, "Elements de propagation electromagnetique, physique fondamentale", Mc GRAWHILL, 2002.

2. Garing, "Ondes electromagnetiques dans les milieux dielectriques, Exercices et problemes corriges", 1998.

3. Paul Lorrain, Dale Corson, and Francois Lorrain, "Les Phenomenes electromagnetiques : Cours, exercices et problemes resolus", 2002.

4. Louis de Broglie, "Ondes Electromagnetiques et Photons",1968.

5. Garing, "Ondes electromagnetiques dans le vide et les milieux conducteurs: Exercices et problemes corriges", 1998.

6. Michel Hulin, "Nicole Hulin, and Denise Perrin, Equations de Maxwell: ondes electromagnetiques. Cours, exercices et problemes resolus", 1998.