



**Université
Hassiba Benbouali, Chlef**

**Faculté de Technologie
Département de Génie Mécanique**

Domaine : Sciences et Techniques, Filière : Génie mécanique

2^{ème} Licence (LMD)

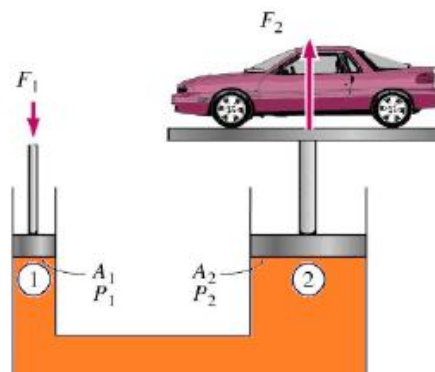
Polycopié de la matière :

MECANIQUE DES FLUIDES I

Cours

Fait par :

Dr. M'hamed BERIACHE



2012-2016

Avant-propos

Ce polycopié répond au canevas ministériel de cours de Mécanique des Fluides I enseigné en deuxième année S3_Licence LMD aux universités algériennes. Il constitue une introduction à la mécanique des fluides d'une durée d'un semestre. Nous l'avons conçu comme un document de référence pour les étudiants de génie mécanique, qui doivent connaître les classifications et les concepts les plus basiques de la mécanique des fluides. De par son contenu, il peut s'avérer utile pour les étudiants d'autres branches du génie.

Ce manuel couvre les différents aspects de la mécanique des fluides dans un ordre classique. Les chapitres s'enchainent et forment un tout. On traite au chapitre 1 les propriétés des fluides et au chapitre 2, de l'hydrostatique. Le chapitre 3 aborde la dynamique des fluides parfaits incompressibles. Les équations de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie, sont bien illustrées dans cette partie de ce document, permettent d'aborder d'un point de vue global, les problèmes courants de la Mécanique des Fluides appliquée. Le chapitre 4 donne une initiation à l'analyse dimensionnelle ensuite il présente les différents régimes d'écoulement ainsi le calcul des pertes de charge linéaires associées ainsi que les pertes de charges singulières.

La rédaction de ce polycopié est le fruit de lecture de nombreux ouvrages classiques et quelques documents électroniques, tous disponibles à la bibliothèque ainsi que sur internet. J'espère que ce polycopié constituera un bon support de plus pour nos études.

M'hamed BERIACHE

Chlef, le 20 novembre 2016

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 01	Propriétés des fluides	Page
1.1	Introduction	01
1.2	Définitions	02
1.3	Fluide parfait	03
1.4	Fluide réel	03
1.5	Fluide incompressible	04
1.6	Fluide compressible	04
1.7	Le modèle du milieu continu	04
1.8	Système d'unité	04
1.9	Les propriétés physiques des fluides	05
1.9.1	La masse volumique	05
1.9.2	Le poids volumique	05
1.9.3	La densité	05
1.9.4	Le volume massique	06
1.9.5	La viscosité	06
1.10	La tension de surface d'un fluide	07
1.11	La différence de pression à l'interface	08
 CHAPITRE 02	 Statique des fluides	 Page
2.1	Introduction	10
2.2	Notion de pression en un point d'un fluide	10
2.3	Principe fondamental de la statique des fluides	12
2.4	Equilibre au sein d'un fluide	13
2.5	Cas des fluides incompressibles	14
2.5.1	Loi de l'hydrostatique	14
2.5.2	Théorème de Pascal	15
2.5.3	Application du théorème de Pascal	17
2.6	Poussée d'Archimède	18
2.7	Mesure de pression	19
2.7.1	Le manomètre	19
2.7.2	Le baromètre et la pression atmosphérique	20
2.8.	Forces hydrostatiques sur les parois	21
2.8.1	Paroi horizontale	22
2.8.2	Paroi plane verticale	23
2.8.3	Paroi plane inclinée	24
2.9	Centres de gravité et moments d'inertie de quelques surfaces usuelles	27

CHAPITRE 03	Dynamique des fluides incompressibles parfaits	Page
3.1	Introduction	28
3.2	Ecoulement permanent	28
3.3	Equation de continuité	28
3.4	Notion de débit	30
3.4.1	Débit massique	30
3.4.2	Débit volumique	31
3.5	Théorème de Bernoulli (écoulement sans échange de travail)	32
3.6	Application de l'équation de Bernoulli	34
3.6.1	Vidange d'un réservoir	34
3.6.2	Tube de Pitot	35
3.6.3	Tube de Venturi	36
3.6.4	Diaphragme	38
3.7	Théorème de Bernoulli (Ecoulement avec échange de travail)	40
3.8	Théorème d'Euler	41
 CHAPITRE 04	 Dynamique des fluides incompressibles réels	 Page
4.1	Analyse dimensionnelle	43
4.2	Dimensions, unités et système international	43
4.3	Théorème de Vaschy-Buckingham	44
4.4	Les étapes de l'analyse dimensionnelle	44
4.5	Exemple d'analyse dimensionnelle dans la mécanique des fluides	45
4.6	Les régimes d'écoulement	48
4.7	Le nombre de Reynolds	48
4.8	Les pertes de charge	49
4.8.1	Le phénomène	49
4.8.2.	Influence des différentes grandeurs sur les pertes de charge	49
4.8.3	Pertes de charge linéaires	50
4.8.3.1	Généralités	50
4.8.3.2	Cas des écoulements laminaires	50
4.8.3.3	Cas des écoulements turbulents	50
4.8.3.4	Diagramme de Moody	52
4.8.4	Pertes de charge singulières	54
4.9	Théorème de Bernoulli généralisé	55
	Références bibliographiques	56
	Annexe : Unités et conversions	57

CHAPITRE 1 :

PROPRIETES DES FLUIDES

1.1. Introduction

La mécanique des fluides (MDF) est la science étudiant les écoulements de fluides en mouvement, lorsque ceux-ci subissent des forces. Elle est la base de la modélisation des écoulements de fluides et le dimensionnement des organes pour fluides et des dispositifs de transport des fluides. Elle comprend deux grandes branches, (voir **Fig. 1.**) :

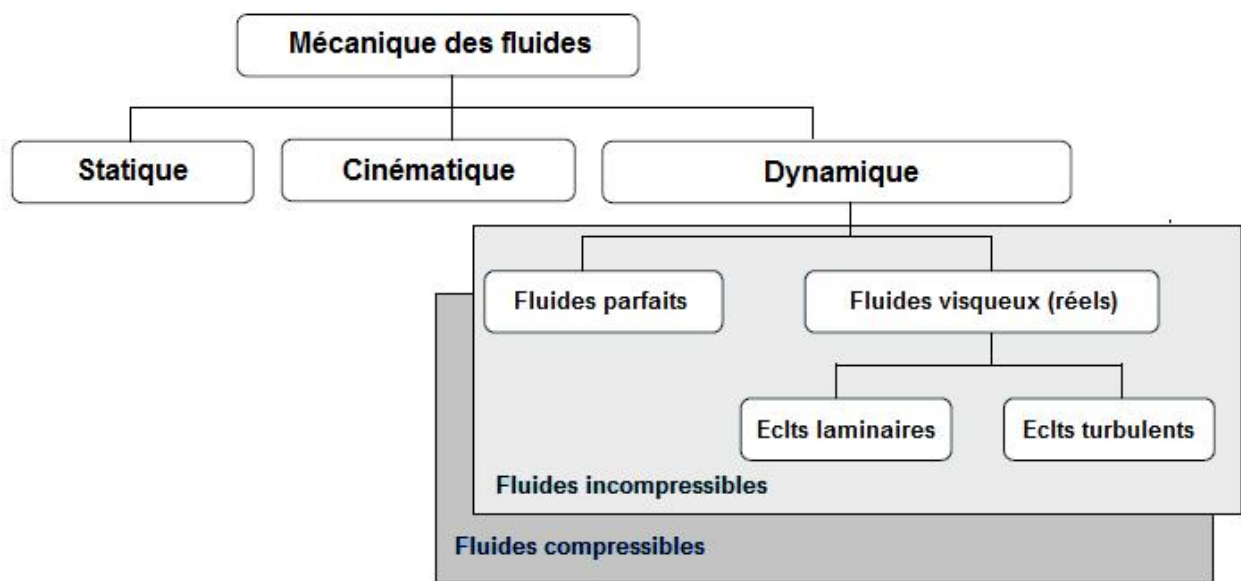


Figure 1. Les branches de la mécanique des fluides

- **la statique des fluides**, ou hydrostatique qui étudie les fluides au repos. C'est historiquement le début de la mécanique des fluides, avec l'étude de la pression. Et la poussée d'Archimède.

- **la cinématique des fluides**, qui étudie les mouvements des fluides sans tenir compte des forces qu'ils subissent.

- **la dynamique des fluides** qui étudie les fluides en mouvement lorsque ceux-ci subissent des forces.

On distingue également d'autres filières liées à la mécanique des fluides, tel que : l'hydraulique, l'hydrodynamique, l'aérodynamique, ...etc.

Une nouvelle approche a vu le jour depuis quelques décennies : C'est la mécanique des fluides numérique (CFD ou **Computational Fluid Dynamics** en anglais), qui simule les écoulements des fluides en résolvant les équations qui les régissent à l'aide d'ordinateurs.

La mécanique des fluides a de nombreuses applications dans divers domaines comme l'alimentation en eau potable des villes, l'aéronautique et l'aérodynamique et aussi dans le domaine biomédical.

1.2. Définitions

Un fluide peut être considéré comme étant une substance formée d'un grand nombre de particules matérielles, très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. C'est donc un milieu matériel continu, déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler (voir **Fig. 2**). Les forces de cohésion entre particules élémentaires sont très faibles de sorte que le fluide est un corps sans forme propre qui prend la forme du récipient qui le contient.

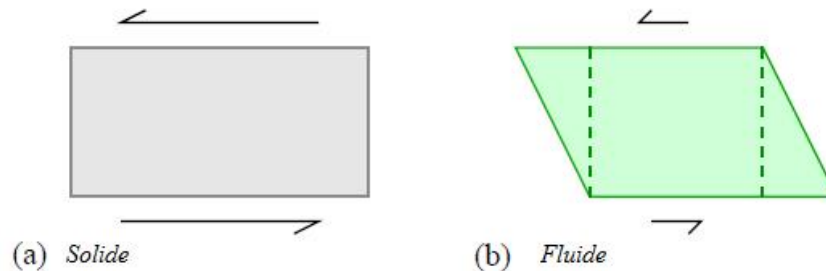


Figure 2. La déformation d'un milieu sous l'effet de contrainte de cisaillement

On insiste sur le fait qu'un fluide est supposé être un milieu continu : même si l'on choisit un très petit élément de volume, il sera toujours beaucoup plus grand que la dimension des molécules qui le constitue. Parmi les fluides, on fait souvent la distinction entre liquides et gaz.

Les fluides peuvent aussi se classer en deux familles relativement par leur viscosité. La viscosité est une de leur caractéristique physique qui sera définie dans la suite du cours et qui définit le frottement interne des fluides. Les fluides peuvent être classés en deux grandes familles :

- La famille des « **fluides Newtoniens** » comme l'eau, l'air et la plupart des gaz ;
- La famille des « **fluides non-Newtoniens** » quasiment tout le reste : le sang, les gels, les boues, les pâtes, les suspensions, les émulsions...etc.

Les fluides dits "**Newtoniens**" ont une **viscosité constante** ou qui ne peut varier qu'en fonction de la température. La deuxième famille est constituée par les fluides "**non newtoniens**" qui ont la

particularité d'avoir leur viscosité qui varie en fonction de la vitesse et des contraintes qu'ils subissent lorsque ceux-ci s'écoulent. Le présent cours est limité uniquement à des fluides newtoniens qui seront classés comme suit.

1.3. Fluide parfait

Soit un système fluide, c'est-à-dire un volume délimité par une surface fermée S fictive ou non (Fig.3).

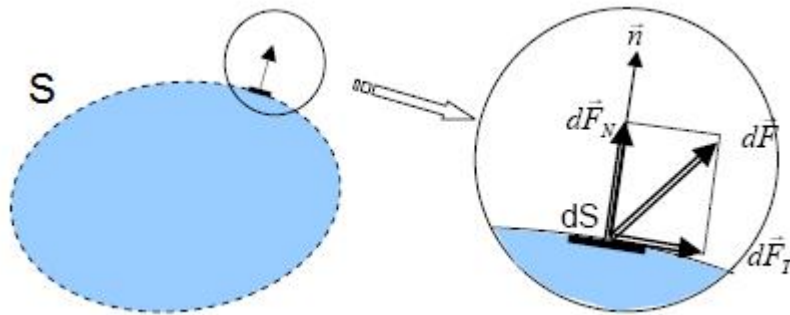


Figure 3. *Système fluide*

Considérons $d\vec{F}$ la force d'interaction au niveau de la surface élémentaire dS de normale \vec{n} entre le fluide et le milieu extérieur. La force $d\vec{F}$ peut être décomposée en deux composantes, à savoir :

- une composante $d\vec{F}_T$ **tangentielle** à dS .
- une composante $d\vec{F}_N$ **normale** à dS .

En mécanique des fluides, un fluide est dite **parfait** s'il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de frottement. C'est à dire quand la composante $d\vec{F}_T$ est nulle. Autrement dit, la force $d\vec{F}$ est normale à l'élément de fluide.

1.4. Fluide réel

Contrairement à un fluide parfait, qui n'est qu'un modèle pour simplifier les calculs, pratiquement inexistant dans la nature, dans un fluide réel les forces tangentielles de frottement interne qui s'opposent au glissement relatif des couches fluides sont prises en considération. Ce phénomène de frottement visqueux apparaît lors du mouvement du fluide.

1.5. Fluide incompressible

Un fluide est dit **incompressible** lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure ($\rho = \rho_0$, masse volumique constante). Les liquides peuvent être considérés comme des fluides incompressibles (eau, huile, etc.)

1.6. Fluide compressible

Un fluide est dit **compressible** lorsque le volume occupé par une masse donnée varie en fonction de la pression extérieure ($\rho = \rho(P)$, masse volumique variable). Les gaz sont des fluides compressibles. Par exemple, l'air, l'hydrogène, le méthane à l'état gazeux, sont considérés comme des fluides compressibles.

1.7. Le modèle du milieu continu

La mécanique des fluides nécessite l'introduction d'un modèle continu qui consiste à considérer des particules matérielles, appelées *particule fluide*, de volume dV suffisamment petit pour que cet élément dV ait les propriétés d'une différentielle, mais suffisamment grand pour contenir un nombre élevé d'atomes ou de molécules (**Fig. 4**).

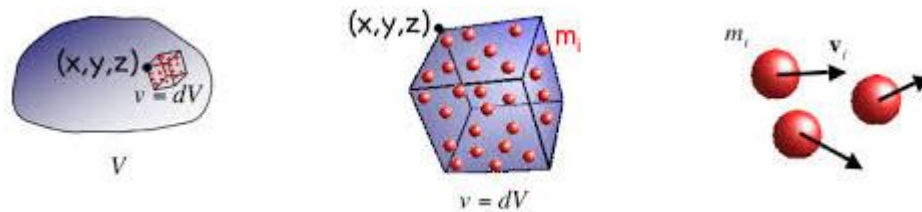


Figure 4. Notion de milieu continu

1.8. Système d'unité

Les unités de mesure utilisées dans ce manuscrit sont ceux du Système International (SI). Les unités principales de ce système sont montrées dans le tableau suivant :

Longueur	Masse	Temps	Pression	Force	Energie	Puissance
<i>Mètre</i>	<i>Kilogramme</i>	<i>Seconde</i>	<i>Pascal</i>	<i>Newton</i>	<i>Joule</i>	<i>Watt</i>
(m)	(Kg)	(S)	(Pa)	(N)	(J)	(W)
<i>L</i>	<i>M</i>	<i>T</i>	$ML^{-1}T^{-2}$	MLT^{-2}	ML^2T^{-2}	ML^2T^{-3}

1.9. Les propriétés physiques des fluides

1.9.1. La masse volumique

La masse volumique, ρ , d'une substance est définie comme étant le rapport :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\text{masse}}{\text{Volume}}; \left[\frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \right]$$

Où :

ρ : Masse volumique en (kg/m³),

m : masse en (kg),

V : volume en (m³).

1.9.2. Le poids volumique (Poids spécifique)

C'est le poids de l'unité de volume. On le note γ . Dans le SI, on l'exprime en N/m³. Sa dimension est : ML⁻²T⁻²

Le poids spécifique et la masse spécifique sont liés par la relation fondamentale : $\gamma = \rho \cdot g$.

$$\gamma = \frac{w}{V} = \frac{\text{Poids}}{\text{Volume}} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^3} \right]$$

Sachant que : $w = m \cdot g = V \gamma$

Il vient : $\gamma = \frac{w}{V} = \frac{m \cdot g}{V} = \frac{\rho \cdot V \cdot g}{V} = \rho \cdot g$

γ : Poids volumique en (N/m³).

m : masse en (kg),

g : accélération de la pesanteur en (m/s²),

V : volume en (m³).

1.9.3. La densité

La densité est définie comme étant le rapport de la masse volumique d'un fluide sur la masse volumique d'un fluide de référence. Elle est donnée par la relation suivante :

$$d = \frac{\rho_{\text{fluide}}}{\rho_{\text{fluide de référence}}}$$

Dans le cas des liquides on prendra l'eau comme fluide de référence. Dans le cas des gaz on prendra l'air comme fluide de référence.

1.9.4. Le volume massique (Volume spécifique)

C'est le volume qu'occupe une unité de masse d'une substance.

$$\hat{v} = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho} ; \left[\frac{m^3}{kg} \right]$$

1.9.5. La viscosité

La viscosité est définie comme étant la résistance du fluide au mouvement, c'est une mesure de son frottement interne. C'est une relation entre la contrainte de cisaillement et le taux de déformation et proportionnelle à une constante dite viscosité dynamique, C'est à dire, les fluides de grande viscosité résistent à l'écoulement et les fluides de faible viscosité s'écoulent facilement. La viscosité est déterminée par la capacité d'entraînement que possède une couche de particules fluides en mouvement sur les autres couches adjacentes.

Expérience :

On prend un fluide entre deux plaques (voir **Fig. 5**) l'une fixe et l'autre est mobile distante l'une de l'autre de h , la plaque mobile se déplace avec une vitesse horizontale U . La surface de la plaque est A et la force qui cause le déplacement est F .

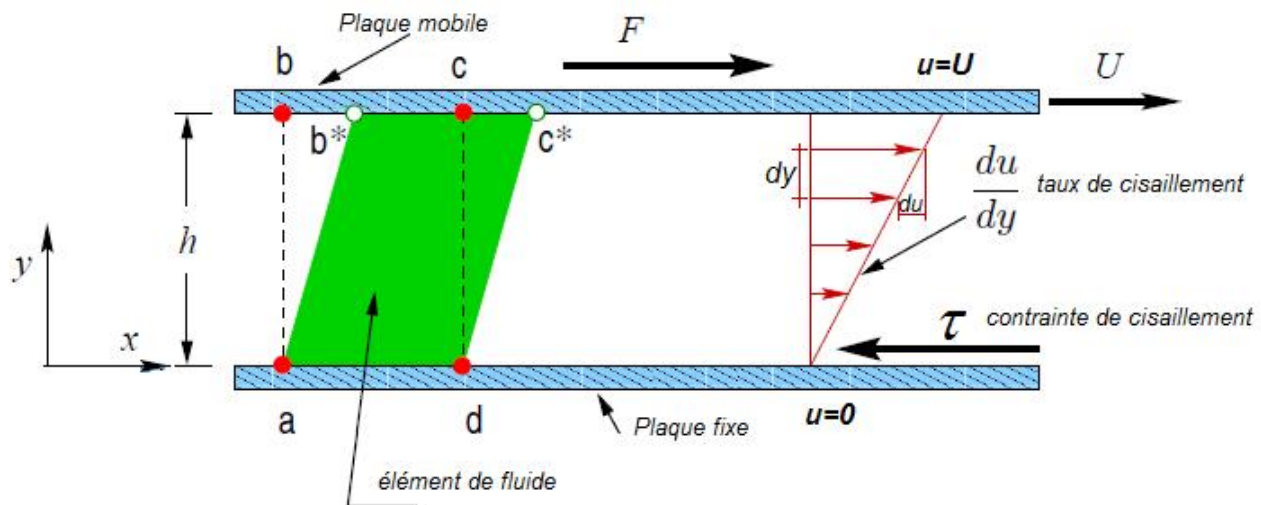


Figure 5. *Expérience de viscosité*

Il est montré expérimentalement que suite à l'effet de la force F , il résulte une contrainte de cisaillement τ au fluide entre les deux plaques, cette contrainte (tension) est opposée au mouvement de la plaque et du fluide, elle est exprimée par :

$$\tau = \frac{F}{A}$$

Il est prouvé aussi que la contrainte de cisaillement est proportionnelle au gradient de vitesse u suivant la distance h entre les deux plaques :

$$\tau \propto \frac{du}{dy}$$

C'est une relation entre la contrainte de cisaillement et le taux de déformation et proportionnelle à une constante dite **coefficient de viscosité dynamique** (η) :

$$\tau = \eta \frac{dU}{dy}$$

Un réarrangement de l'éq. Précédente donne :

$$\eta = \frac{\text{Contrainte de cisaillement}}{\text{Taux de cisaillement}} = \frac{\frac{F_s}{A_s}}{\frac{dU}{dy}} = \frac{\tau \cdot dy}{dU} ; [\text{N.s/m}^2] \text{ ou } [\text{Pa.s}]$$

η : C'est la **viscosité dynamique**

La viscosité cinématique (ν) : est définie comme étant : la viscosité dynamique sur la masse volumique, son unité est : $[\text{m}^2/\text{s}]$. Elle est exprimée comme suit :

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]$$

1.10. Tension de surface d'un fluide

Dans cette section, nous discuterons une propriété de fluide qui se produit au niveau des interfaces d'un liquide et de gaz ou à l'interface de deux liquides non miscibles. Voir **Fig. 7**, le liquide, molécules 'A' est sous l'action d'attraction moléculaire entre les molécules (force de cohésion). Cependant la molécule 'B' à proximité de l'interface est soumise aux attractions moléculaires du même type d'un côté et des molécules de type différent (adhérence) d'un autre côté. En conséquence, les forces de cohésion pour la molécule liquide 'A' s'annulent. Mais à l'interface de molécule 'B' les forces de cohésion dépassent la force d'adhérence du gaz. Les forces de force nette correspondant sur l'interface ; l'interface est à un état de tension similaire à une membrane élastique étirée. Comme expliqué, la force nette correspondante est désignée par **la tension de surface**. En bref, il y'a des contraintes de traction apparentes qui agissent à l'interface de deux fluides non miscibles.

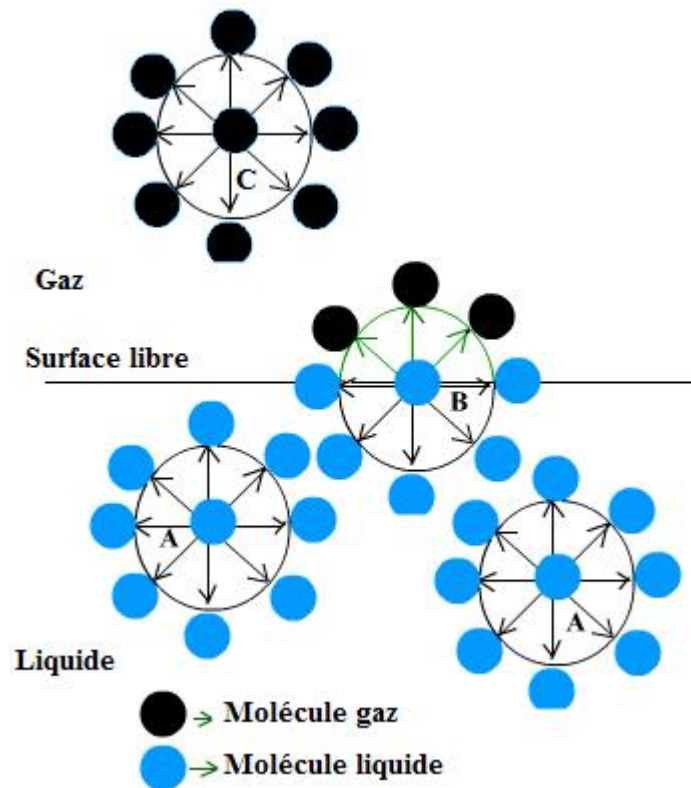


Figure 7. *Origine de la tension de surface d'un fluide*

On note que, la tension de surface diminue avec la température du liquide parce que les forces cohésives intermoléculaires diminuent. A la température critique d'une surface de fluide, la tension devient nulle ; c- à-dire la limite entre les fluides disparaît.

1.11. La différence de pression à l'interface :

Afin d'étudier l'effet de la tension superficielle sur la différence de pression à travers une interface courbe, on envisage une petite goutte sphérique d'un fluide au repos. Étant donné que la gouttelette est petite, les variations de pression hydrostatique deviennent négligeables. La gouttelette est divisée en deux moitiés, comme indiqué dans la **Fig. 8**. Étant donné que la gouttelette est à l'équilibre, la somme des forces agissant à l'interface dans une direction quelconque est nulle.

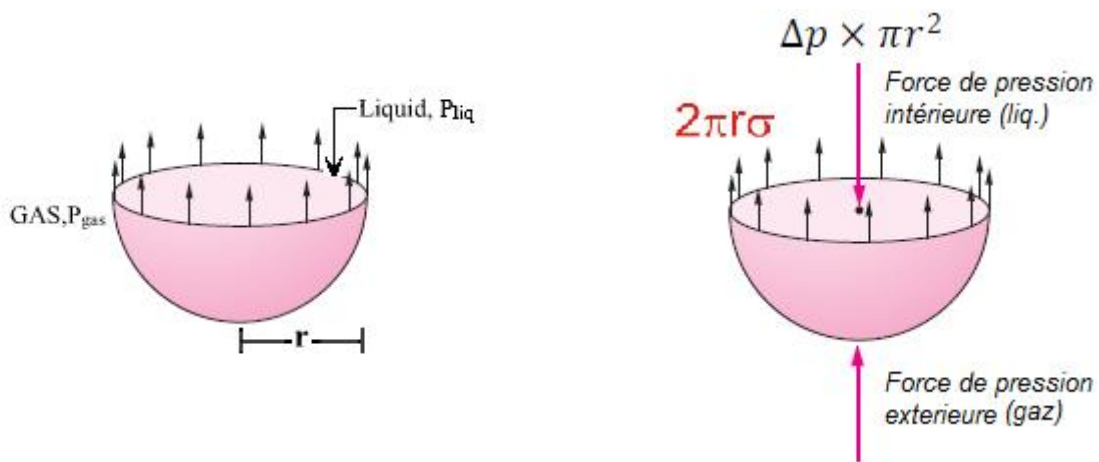


Figure 8. *Tension de surface sur une goutte*

On notera que les seules forces qui agissent à l'interface sont la pression et la tension de surface.

L'équilibre des forces donne :

$$(P_{liq} - P_{gaz}) \pi r^2 = \uparrow (2\pi r \sigma)$$

Avec ;

$$\Delta p = P_{liq} - P_{gaz},$$

Il vient donc :

$$\Delta p = 2 \frac{\sigma}{r}$$

CHAPITRE 2 :

STATIQUE DES FLUIDES

2.1. Introduction

La statique des fluides est la branche de la mécanique des fluides qui traite principalement les fluides au repos. Les problèmes de statique des fluides sont beaucoup plus simples que ceux qui sont associés au mouvement des fluides, et des solutions analytiques exactes sont possibles. Etant donné que les éléments individuels du fluide ne se déplacent pas par rapport à l'autre, les forces de cisaillement ne sont pas impliquées et toutes les forces dues à la pression du fluide sont perpendiculaires à la surface sur laquelle ils agissent. La statique des fluides peut couvrir les problèmes dans lesquels des éléments du fluide ne se déplacent pas par rapport à l'autre, même si le fluide dans son ensemble peut se déplacer. En l'absence de mouvement relatif entre les éléments de fluide, la viscosité du fluide ne présente aucun problème.

Ce chapitre est consacré à l'étude des fluides au repos. Les lois fondamentales en statique des fluides y sont énoncées. La notion de pression, le théorème de Pascal, le principe d'Archimède et la relation fondamentale de l'hydrostatique y sont expliqués. Le calcul des presses hydrauliques, la détermination de la distribution de la pression dans un réservoir...etc.

2.2. Notion de pression en un point d'un fluide

La pression est une grandeur scalaire. C'est l'intensité de la composante normale de la force qu'exerce le fluide sur l'unité de surface (**Fig.1.**).

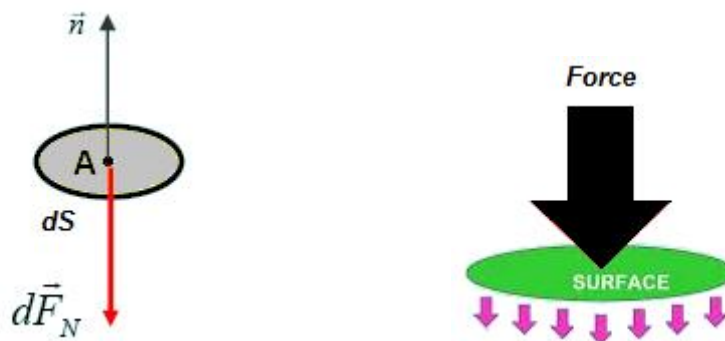


Figure 1. Force de pression exercée sur une surface

Considérons un récipient rempli de liquide. Si on perce une ouverture dans ce récipient, on constate que le liquide s'échappe perpendiculairement à la surface, traduisant la présence d'une force \vec{F} normale à la surface (**Fig.2.**)

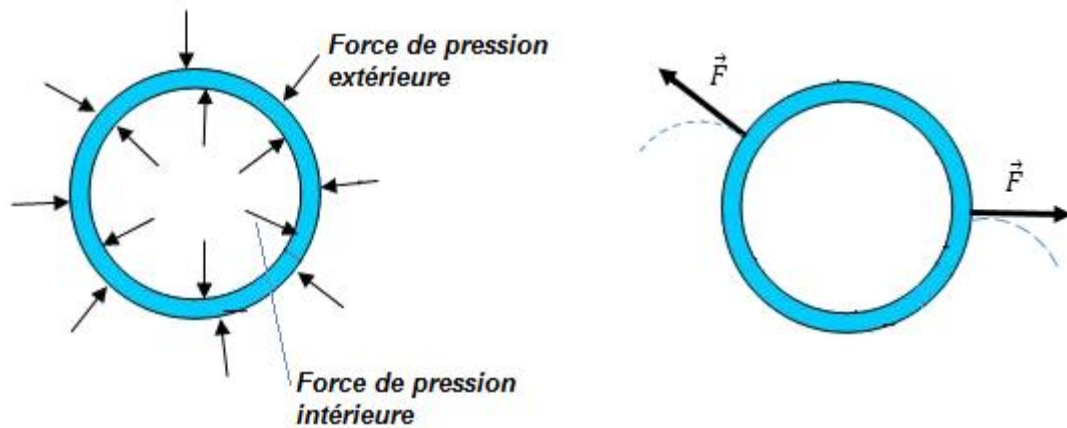


Figure 2. La force de pression

Si, nous considérons un élément de surface dS et la force $d\vec{F}$ qui s'exerce normalement à la surface, compte tenu de l'isotropie de la force, on appelle pression le rapport :

$$p = \frac{dF}{dS}$$

Avec, p : la pression en A,

dF : composante normale de la force élémentaire de pression qui s'exerce sur la surface,

dS : surface élémentaire de la face A.

La pression est une quantité scalaire, fonction du point A (voir **Fig.1.**) ou elle est définie :

$$p(A) = p(x, y, z) .$$

L'unité de la pression est le Newton par mètre carré $\left[\frac{N}{m^2} \right]$ ou Pascal (Pa). Elle peut être exprimée

aussi en : $\left[\frac{kg}{m.s^2} \right] .$

2.3. Principe fondamental de la statique des fluides

Soit un volume élémentaire (**Fig.3.**) $dV = dx.dy.dz$ au sein d'un fluide dont les faces sont définies parallèles aux axes (Ox, Oy, Oz).

Considérons les deux faces **ABFE** et **CGHD** perpendiculaires à Oz .

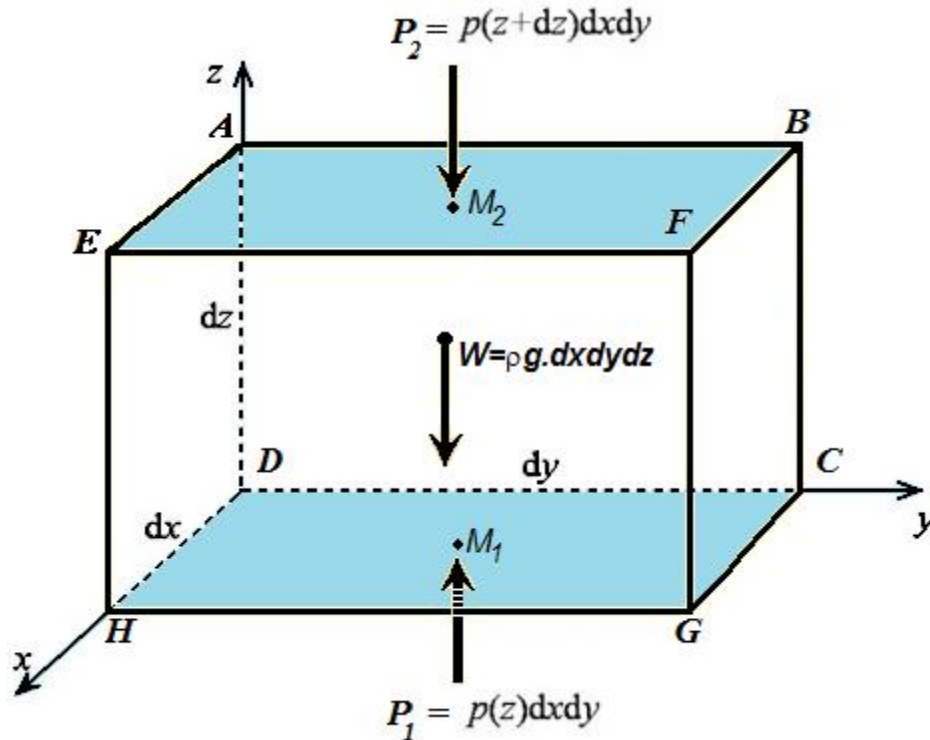


Figure 3. Les forces agissant sur un élément fluide

Les **forces pressantes** qui s'exercent sur les deux faces considérées sont :

$$\text{Pression } p_1 : d\vec{F}_1 = p_1 . dx . dy . \vec{k}$$

$$\text{Pression } p_2 : d\vec{F}_2 = -p_2 . dx . dy . \vec{k}$$

La force résultante est :

$$d\vec{F}_z = d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2 = (p_1 - p_2) dx . dy . \vec{k}$$

La variation de pression suivant l'axe Oz , peut s'écrire :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{p_2 - p_1}{dz}$$

C'est une dérivation partielle, parce que p dépend à priori de x et y aussi,

$$p_1 - p_2 = -\frac{\partial p}{\partial z} dz$$

$$d\vec{F}_z = \frac{-\partial p}{\partial z} dx.dy..dz\vec{k} = \frac{-\partial p}{\partial z} dV.\vec{k}$$

$$d\vec{F}_z = \frac{-\partial p}{\partial z} dV.\vec{k}$$

De la même manière :

$$d\vec{F}_x = \frac{-\partial p}{\partial x} dV.\vec{i}$$

$$d\vec{F}_y = \frac{-\partial p}{\partial y} dV.\vec{j}$$

$$d\vec{F} = d\vec{F}_x + d\vec{F}_y + d\vec{F}_z = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}.\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}.\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}.\vec{k}\right)dV$$

$$d\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad } p}.dV$$

Ce résultat montre bien que : $d\vec{F}$ est opposée à $\overrightarrow{\text{grad } p}$.

2.4. Equilibre au sein d'un fluide

En plus les forces de pressions agissant sur l'élément fluide, elle s'ajoute la force du poids de l'élément fluide lui-même :

$$d\vec{F} = \dots.\vec{g}.dV$$

Pour le fluide en équilibre, on a :

$$\sum \vec{F} = d\vec{P} + d\vec{F} = 0$$

Soit :

$$\overrightarrow{\text{grad } p} = \dots.\vec{g}$$

Avec :

$$\overrightarrow{\text{grad } p} = \frac{\partial p}{\partial x}.\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}.\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}.\vec{k}$$

Les surfaces isobares ($p=Cte$) sont perpendiculaires à \vec{g} et sont donc horizontales (**Fig.4**).

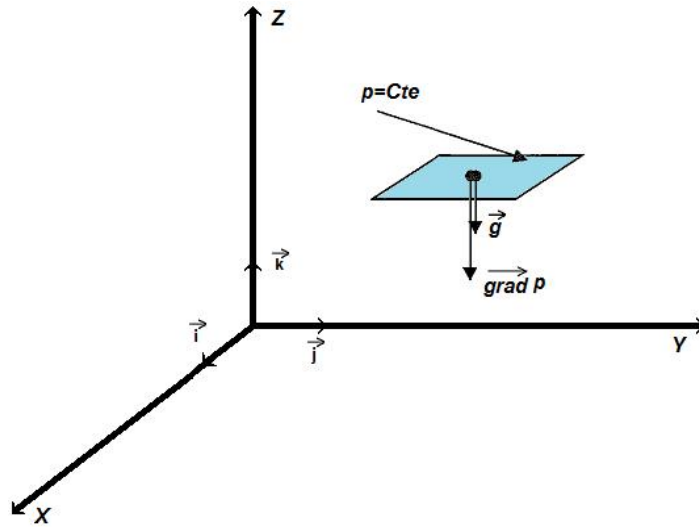


Figure 4. Les isobares forment des plans horizontaux

La pression augmente avec la hauteur et ne dépend que de z :

$$p=p(z)$$

Donc :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dp}{dz}$$

Alors :

$$\overrightarrow{grad p} = \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \vec{k} = \dots \cdot \vec{g} = -\dots \cdot g \cdot \vec{k}$$

$$dp = -\dots \cdot g \cdot dz$$

2.5. Cas des fluides incompressibles

2.5. 1. Loi de l'hydrostatique

Pour obtenir la différence de pression entre deux points M_1 à hauteur Z_1 et M_2 à hauteur Z_2 (**Fig.5**), il suffit d'intégrer l'expression précédente :

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\dots \cdot g \cdot \int_{Z_1}^{Z_2} dz$$

on obtient :

$$p_2 - p_1 = \dots \cdot g \cdot (Z_1 - Z_2)$$

Posons : $h = (Z_1 - Z_2)$,

Il vient :

$$\Delta p = \dots . g . h$$

C'est la loi fondamentale de l'hydrostatique.

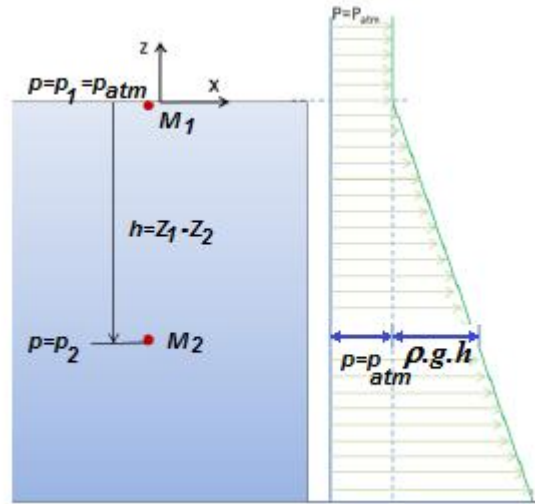


Figure 5. Variation de la pression en fonction de la hauteur

2.5. 2. Théorème de Pascal

Le théorème de Pascal s'énonce comme suit : dans un fluide incompressible en équilibre, toute variation de pression en un point entraîne la même variation de pression en tout autre point. Considérons un élément de fluide d'épaisseur suivant Oz égale à l'unité, comme indiqué ci-dessous. Puisque la section transversale du prisme est un triangle équilatéral, p forme un angle de 45° avec l'axe des Ox.

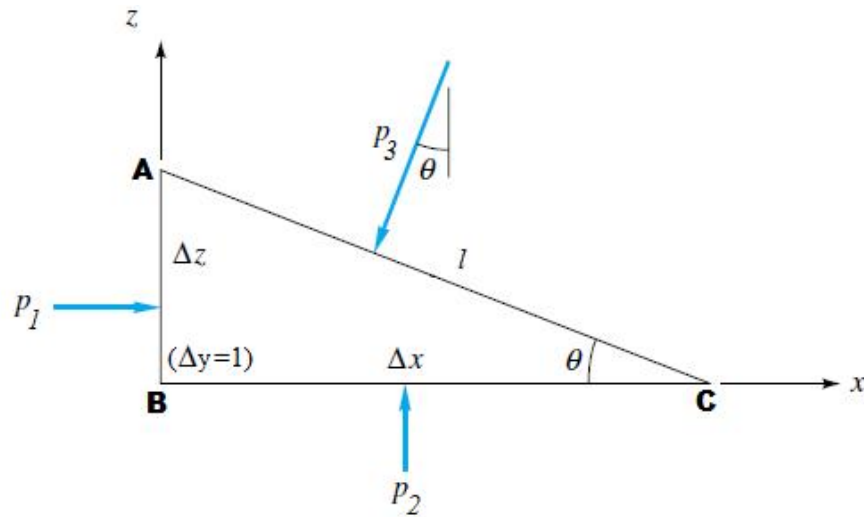


Figure 6. Forces pressantes sur un élément de fluide en équilibre.

Si les intensités de pression normales aux trois surfaces sont p_1 , p_2 , p_3 , (voir **Fig.6.**), il vient donc :

$$F = p.A$$

Avec, F : la force pressante
 p : la pression
 A : la surface sous pression

- ✓ La force appliquée sur la surface AB : $F_{AB} = p_1.\Delta z = p_1.(AB.1)$
- ✓ La force appliquée sur la surface BC : $F_{BC} = p_2.\Delta x = p_2.(BC.1)$
- ✓ La force appliquée sur la surface AC : $F_{AC} = p_3.l = p_3.(AC.1)$

Projetons les forces verticalement Oy :

$$p_1.AB = p_3.AC.\cos_{\theta}$$

Mais, $AC.\cos_{\theta} = AB$

Donc, $p_1 = p_3$

Projetons les forces horizontalement Ox :

$$p_2.BC = p_3.AC.\sin_{\theta}$$

Mais, $AC.\sin_{\theta} = BC$

Donc, $p_2 = p_3$ Et $p_1 = p_2 = p_3$

En conclusion, *la pression en tout point est égale dans toutes les directions.*

2.5.3. Applications de la loi de Pascal

1°/ La presse hydraulique :

Soit le schéma de principe d'une presse hydraulique (**Fig. 7.**). Dans ce dernier cas, on produit une force considérable à partir d'une force relativement peu importante en construisant la surface d'un piston (à la sortie) plus large que celle de l'autre (à l'entrée).

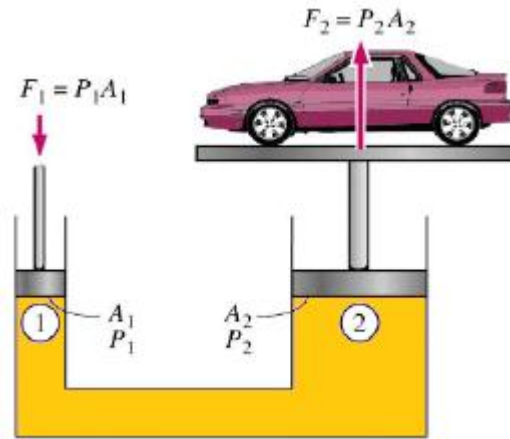


Figure 7. Principe d'une presse hydraulique

Lorsque les deux piston 1 et 2 sont sur le même niveau, on a :

$$p_1 = p_2$$

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad \text{il vient,} \quad \frac{F_2}{F_1} = \frac{A_2}{A_1}$$

Le rapport de section $\frac{A_2}{A_1}$ induit un grand avantage en terme de force de levage, voir :

$$\text{Si, } A_2 \gg A_1 \Rightarrow F_2 \gg F_1.$$

2°/ Le principe de freinage automobile :

La **Fig. 8.** Illustre le principe de freinage automobile utilisant l'huile comme fluide transmetteur de forces. Ce système est l'une des applications industrielles les plus répandues de loi de Pascal.

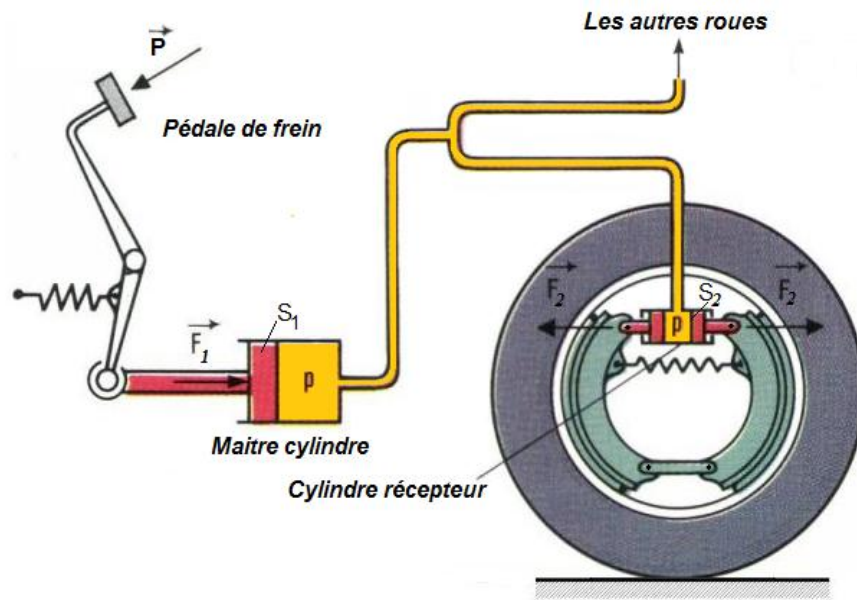


Figure 8. Freinage automobile

2.6. Poussée d'Archimède

Tout corps plongé dans un fluide reçoit de la part de ce fluide une force (poussée) verticale, vers le haut dont l'intensité est égale au poids du volume du fluide déplacé (ce volume est donc égal au volume immergé du corps), (voir Fig. 9.).

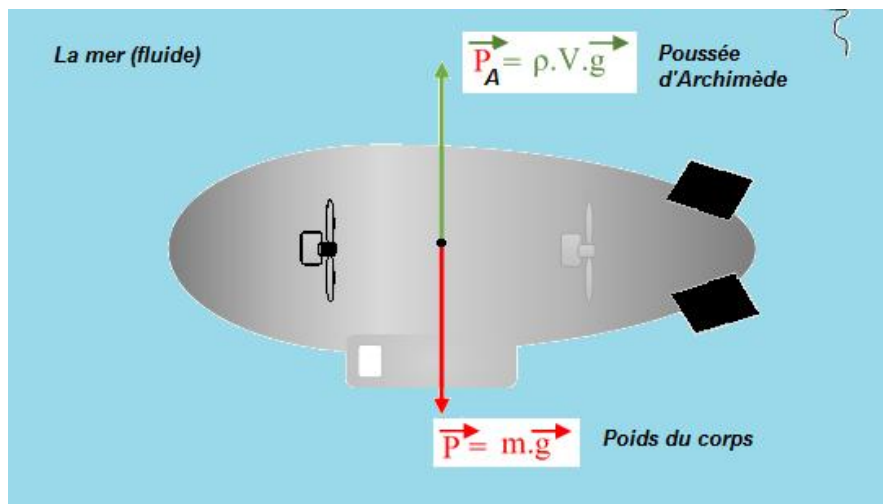


Figure 9. Poussée d'Archimède

La force de poussée est donnée comme suit :

$$P_A = \rho \cdot V_{\text{immergé}} \cdot g$$

A l'équilibre, on a :

$$\sum_i \vec{F}_{ext} = 0$$

$$P_A - P = 0 \quad \text{Avec, } P = m.g = \dots V.g$$

$$\text{Alors :} \quad P_A - \dots V.g = 0$$

$$\text{D'où :} \quad P_A = \dots V.g$$

2.7. Mesure de pression

2.7.1. Le manomètre

A partir de la relation fondamentale de la statique des fluides,

$$\Delta p = \dots g . \Delta h$$

$$\Delta h = \frac{\Delta p}{\dots g}$$

Cela signifie que la pression peut être mesurée par une colonne de fluide de hauteur (Δh). Un instrument basé sur ce principe est appelé manomètre, il est très utilisé dans la mesure des faibles et moyennes pressions.

Considérons le manomètre (**Fig. 10**), on l'utilise pour mesurer la pression dans le réservoir. Si, on admet que l'effet de pesantur sur le gaz est négligeable, la pression dans n'importe quel point dans le réservoir est identique à celle du point (1), encore, la pression ne varie pas horizontalement dans le fluide, on déduit que la pression au point (2) est la même qu'au point (1).

$$\text{Alors, } p_1 = p_2$$

$$p_2 = \dots g . h + p_{atm}$$

$$p_2 = p_{statique} + p_{atm}$$

Où : ρ : masse volumique du fluide,

g : la pesanteur,

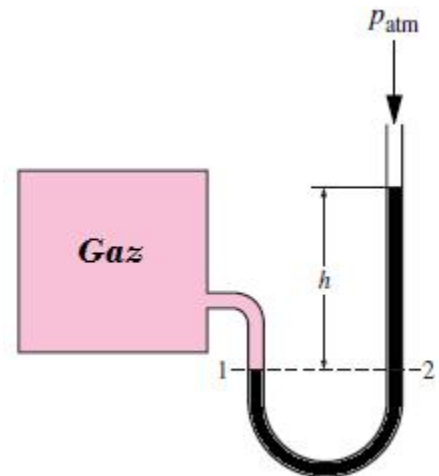


Figure 10. Un manomètre

h : l'élévation du fluide.

2.7.2. Le baromètre et la pression atmosphérique

La pression atmosphérique est mesurée par un appareil dit Baromètre. L'italien Evangelista Torricelli (1608-1647), le premier qui a pu mesurer la pression atmosphérique par une simple expérience ingénieuse.

Comme le montre la figure ci-dessous, la pression au point (B) est égale à la pression atmosphérique, et la pression au point (C) peut être prise comme nulle puisque au-delà du point (C) il n'y a que du gaz et la pression qu'elle exerce est négligeable par rapport à la pression atmosphérique, P_{atm} .

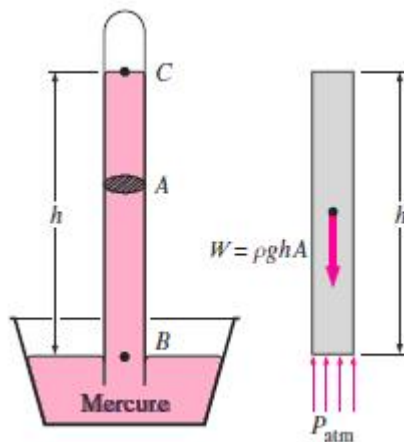


Figure 11. Le baromètre

D'après la **Fig. 11**, à l'équilibre, on écrit : $P_{atm} = \rho gh$

On remarque d'après la relation précédente que la longueur et la section du tube n'influencent pas la pression, c.-à-d. n'influent pas sur la hauteur h .

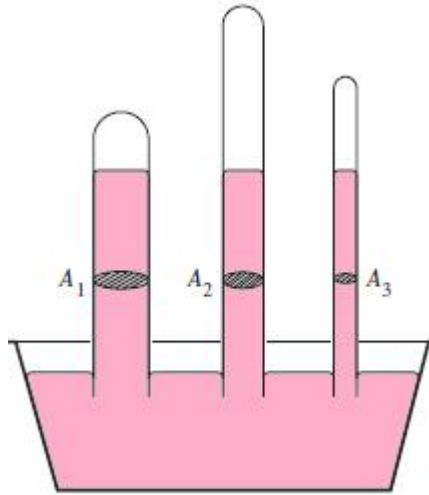


Figure 12. *Dépendance de la pression atmosphérique de la hauteur seulement.*

En général, l'unité de la pression est l'atmosphère, qui est définie comme la pression produite par une colonne de mercure de 760 mm de hauteur à $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ ($\rho_{\text{Hg}} = 13,595 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$) et sous la gravité ($g = 9.807\text{ m/s}^2$).

Si, on remplace le mercure par un autre fluide qui est l'eau par exemple, la pression atmosphérique est mesurée par une colonne d'eau de hauteur de $10,33\text{ m}$ environ.

2.8. Forces hydrostatiques sur des parois

Soit une surface de géométrie quelconque immergée dans un fluide (liquide). En général, on est amené à répondre aux questions suivantes :

- Quelle est l'intensité de la force qui s'applique sur cette surface ?
- Quel est le point d'application (position) de cette force ?
- Quelle est sa direction ?

Les cas suivants sont étudiés :

- Force hydrostatique sur une surface **plane horizontale, verticale** ou **inclinée**.
- Force hydrostatique sur une surface **gauche**.

2.8.1. Paroi plane horizontale

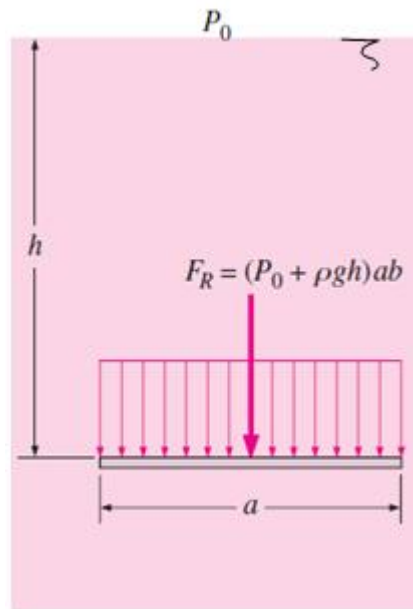


Figure 13. Force sur une paroi horizontale

La distribution de la pression sur la surface horizontale immergée (**Fig. 13**) est uniforme, et son magnitude est :

$$p = p_0 + \dots g.h$$

Avec, h est la distance de la surface de la plaque à partir de la surface libre. Cependant, la force hydrostatique agissant sur la surface horizontale rectangulaire est :

$$F_R = \int p.dA = (p_0 + \dots g.h)ab$$

$$F_R = (p_0 + \dots g.h)ab$$

Cette force agit au centre de la plaque (voir **Fig. 13**).

2.8.2. Paroi plane verticale

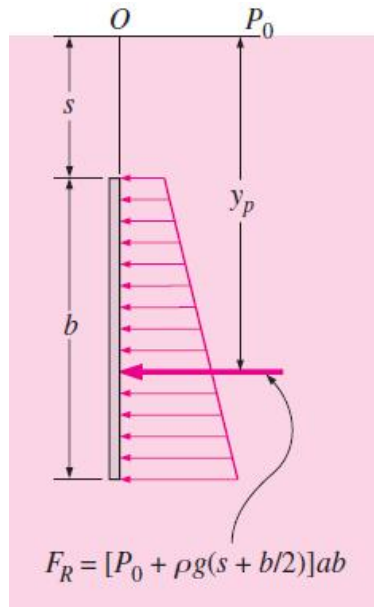


Figure 14. Force sur une paroi verticale

Considérons une plaque plane rectangulaire de hauteur h et de largeur b et d'épaisseur a complètement immergée de manière verticale, elle fait 90° avec la surface libre. Elle est à une distance s de la surface libre (voir **Fig.14**). La force hydrostatique résultante sur la surface supérieure est égale au produit de la pression moyenne par la surface d'action. Elle est donnée par :

$$F_R = p_C \cdot A = (p_0 + \dots g \cdot (s + b/2)) a \cdot b$$

Cette force agit sur la paroi verticale au niveau du point situé à y_p . Cette conclusion est le résultat de la l'analyse suivante : A l'équilibre de la paroi, on a :

$$\sum_{pression} M_p = \sum_{Forcer} M_{F_R}$$

$$\int_0^H y dF_R = F_R \cdot y_p$$

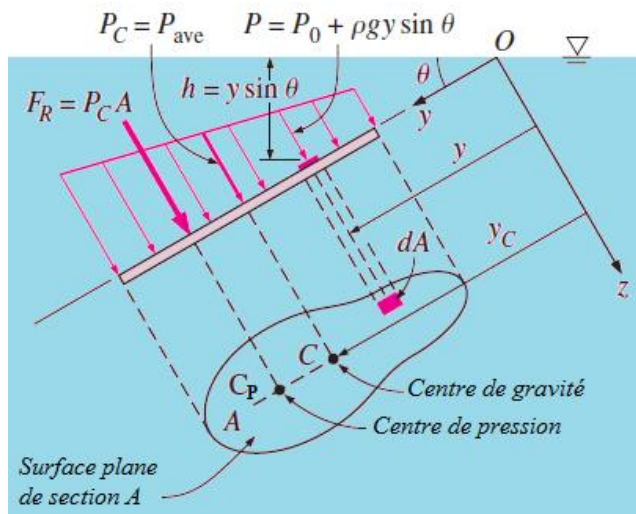
$$\frac{1}{3} \dots g(b + s)^3 L = \left(\frac{1}{2} \dots g(b + s)^2 L \right) y_p$$

On obtient alors :

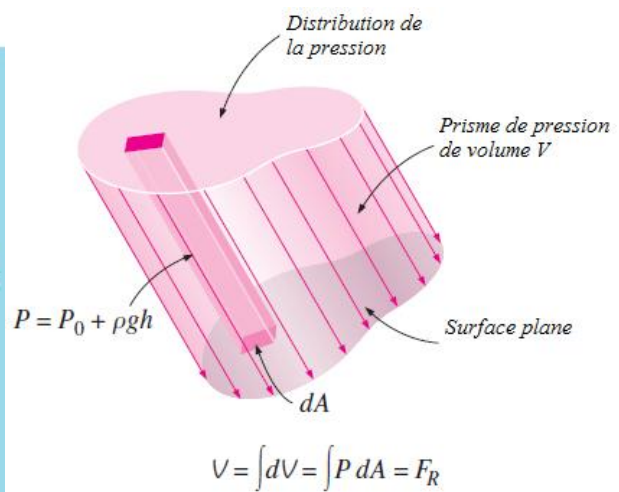
$$y_p = \frac{2}{3}(b + s) \text{ (Centre de pression).}$$

2.8.3. Paroi plane inclinée

Considérons une paroi plane de forme quelconque de surface A , immergée dans un liquide. Elle est inclinée d'un angle, θ par rapport à l'axe Oy . L'axe Ox coïncide avec la surface libre du fluide.



a) *Plaque inclinée*



b) *Prisme de pression*

Figure 15. *Pression sur une paroi inclinée*

La pression sur n'importe quel point de la plaque est donnée par :

$$p = p_0 + \dots g \cdot h = p_0 + \dots g \cdot y \cdot \sin \theta$$

La force hydrostatique résultante est :

$$F_R = \int_A p dA = \int_A (p_0 + \dots g y \sin \theta) dA = p_0 A + \dots g \sin \theta \int_A y dA$$

Mais, le moment de surface $\int_A y dA$ est relié avec l'ordonnée y du centre de la surface par :

$$y_C = \frac{1}{A} \int_A y dA$$

Remplaçant dans, $F_R = (p_0 + \dots g y_C \sin \alpha) A = (p_0 + \dots g h_C) A = p_C A = p_{Moy} A$

Avec : $p_C = p_0 + \dots g h_C$ est la pression au niveau du centre de gravité de la surface A, qui est équivalente à la pression moyenne appliquée sur la surface A., et $h_C = y_C \sin \alpha$ est la distance verticale entre le centre de gravité et la surface libre du fluide, voir **Fig. 15**.

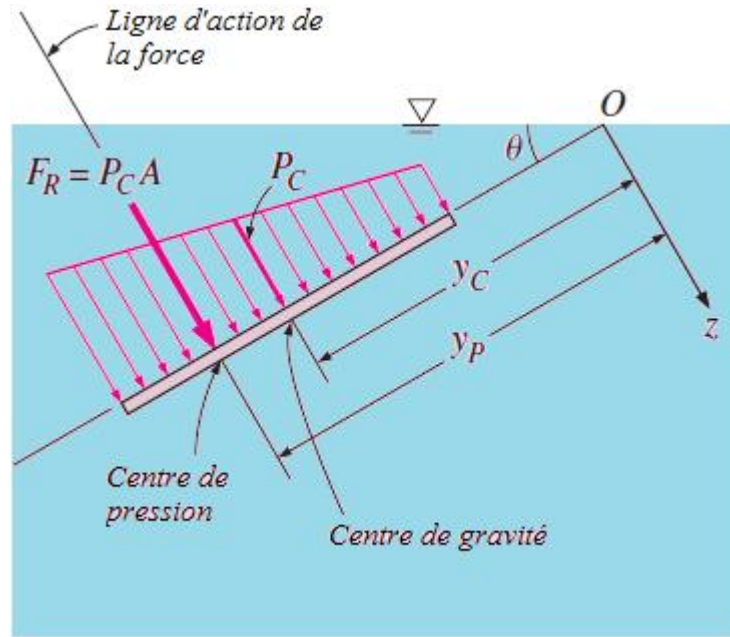


Figure 16. La force résultante sur la plaque

Ainsi, nous concluons que :

$$y_P F_R = \int_A y p dA = \int_A y (p_0 + \dots g y \sin \alpha) dA = p_0 \int_A y dA + \dots g \sin \alpha \int_A y^2 dA$$

Or, $y_P F_R = p_0 y_C A + \dots g \sin \alpha \cdot I_{xx, O}$

Ou, y_P est la distance du centre de pression à partir de l'axe Ox (point O), et

$I_{xx, O} = \int_A y^2 dA$ est le deuxième moment de la surface (**moment d'inertie de surface**).

Les moments d'inertie de surface sont largement disponibles pour des géométries usuelles, mais souvent sont donnés par rapport aux axes passant par le centre de gravité de la surface.

Le deuxième moment d'une surface pour deux axes parallèles sont reliés l'un à l'autre par la loi des axes parallèles, qui est dans ce cas donnée comme suit :

$$I_{xx,O} = I_{xx,C} + y_C^2 \cdot A$$

Avec : $I_{xx,C}$ est le second moment de la surface par rapport à l'axe Ox passant par le centre de gravité de la surface et y_C (l'ordonnée du centre de gravité) est la distance entre les deux axes parallèles. Par substitution de F_R et I_{xx} , o par leurs expressions susmentionnées dans la relation ci-dessus, on obtient :

$$y_P = y_C + \frac{I_{xx,C}}{\left[y_C + \frac{P_0}{(\dots g \sin \alpha) A} \right]}$$

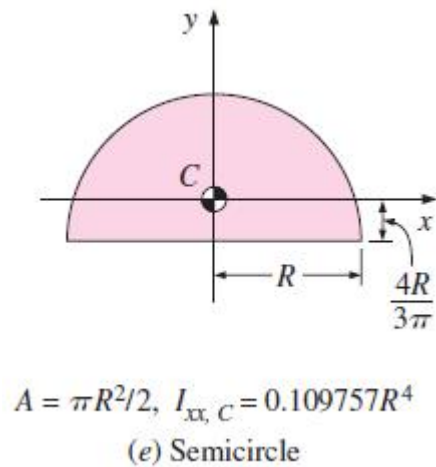
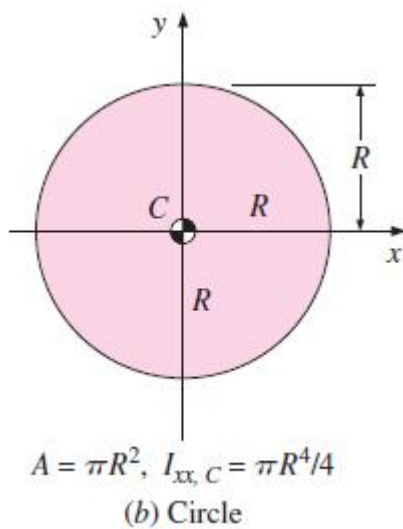
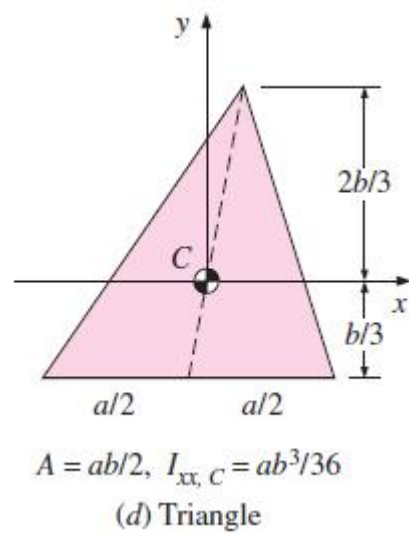
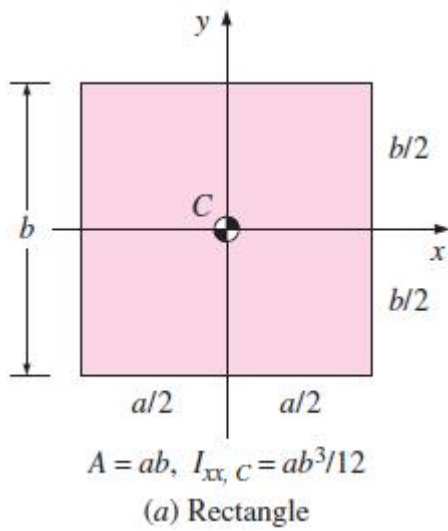
Pour $P_0=0$, qui est souvent le cas ou la pression atmosphérique est négligée, la relation précédente devient :

$$y_P = y_C + \frac{I_{xx,C}}{y_C A}$$

En connaissant y_P , la distance verticale du centre de pression à partir de la surface libre est donnée par :

$$h_P = y_P \cdot \sin \alpha.$$

2.9. Centres de gravité et moments d'inertie de quelques surfaces usuelles



CHAPITRE 3 :

DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES PARFAITS

3.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier les fluides **en mouvement**. Contrairement aux solides, les éléments d'un fluide en mouvement peuvent se déplacer à des vitesses différentes. L'écoulement des fluides est un phénomène complexe.

On s'intéresse aux équations fondamentales qui régissent la dynamique des fluides incompressibles parfaits, en particulier :

- **l'équation de continuité** (conservation de la masse),
- **le théorème de Bernoulli** (conservation de l'énergie) et,
- **le théorème d'Euler** (conservation de la quantité de mouvement) à partir duquel, on établit les équations donnant la force dynamique exercée par les fluides en mouvement (exemple les jets d'eau).

3.2. Ecoulement permanent

Un écoulement est dit **permanent** ou stationnaire lorsqu'en chaque point de l'espace, le vecteur vitesse \vec{V} est indépendante du temps.

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$$

Dans le cas contraire, l'écoulement est dit **non-permanent** ou instationnaire.

3.3. Equation de continuité

Considérons une veine d'un fluide incompressible (**Fig. 13**), de masse volumique animée d'un écoulement permanent.

On désigne par :

- ✓ A_1 et A_2 respectivement la section d'entrée et la section de sortie du fluide à l'instant t ,
- ✓ A'_1 et A'_2 respectivement les sections d'entrée et de sortie du fluide à l'instant $t'=(t+dt)$,

- ✓ \vec{V}_1 et \vec{V}_2 les vecteurs vitesses d'écoulement respectivement à travers les sections S_1 et S_2 de la veine.
- ✓ dx_1 et dx_2 respectivement les déplacements des sections S_1 et S_2 pendant l'intervalle de temps dt ,
- ✓ dm_1 : masse élémentaire entrante comprise entre les sections A_1 et A'_1 ,
- ✓ dm_2 : masse élémentaire sortante comprise entre les sections A_2 et A'_2 ,
- ✓ m : masse comprise entre A_1 et A_2 ,
- ✓ dV_1 : volume élémentaire entrant compris entre les sections A_1 et A'_1 ,
- ✓ dV_2 : volume élémentaire sortant compris entre les sections A_2 et A'_2 ,

A l'instant t : le fluide compris entre A_1 et A_2 a une masse égale à $(dm_1 + m)$

A l'instant $t+dt$: le fluide compris entre A'_1 et A'_2 à une masse égale à $(m + dm_2)$.

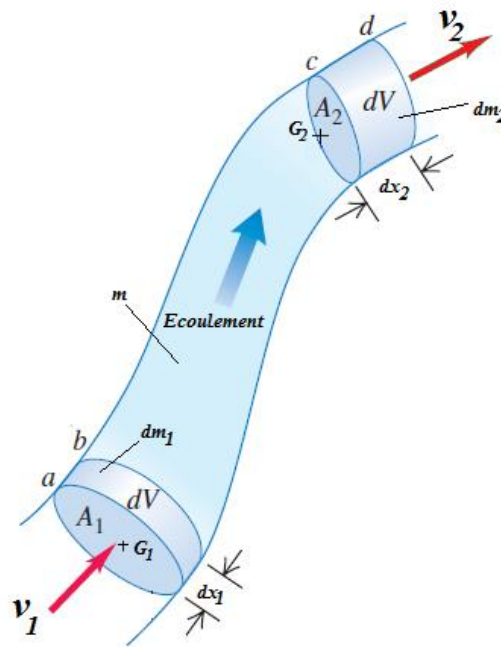


Figure 13. *Veine de Fluide incompressible*

Par conservation de la masse :

$$dm_1 + m = m + dm_2$$

En simplifiant par m , on obtient :

$$dm_1 = dm_2$$

Donc,

$$_1.dV_1 = _2.dV_2$$

Ou encore :

$$_1.A_1.dx_1 = _2.A_2.dx_2,$$

En divisant par dt , on aboutit à :

$$..._1.A_1.\frac{dx_1}{dt} = ..._2.A_2.\frac{dx_2}{dt} \Leftrightarrow ..._1.A_1.V_1 = ..._2.A_2.V_2$$

Puisque le fluide est incompressible :

$$_1 = _2 =$$

On obtient l'équation de continuité de la sorte :

$$A_1.V_1 = A_2.V_2$$

Cette relation représente le débit volumique Q exprimé en (m^3/s). L'équation de continuité représente la loi de conservation de masse.

3. 4. Notion de débit

3.4.1. Débit massique

Le débit massique d'une veine fluide est la limite du rapport $\frac{dm}{dt}$ quand dt tend vers 0.

$$q_m = \frac{dm}{dt}$$

Où :

- q_m est la masse du fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite.
- dm : masse élémentaire en (kg) qui traverse la section pendant un intervalle de temps dt .
- dt : intervalle de temps en (s)

En tenant compte des équations précédentes on obtient :

$$q_m = \frac{dm}{dt} = ..._1.A_1.\frac{dx_1}{dt} = ..._2.A_2.\frac{dx_2}{dt}$$

$$q_m = \dots V_1 \cdot A_1 = \dots V_2 \cdot A_2$$

Soit dans une section droite quelconque S de la veine fluide à travers laquelle le fluide s'écoule à la vitesse moyenne V :

$$q_m = \dots V \cdot A$$

Où :

q_m : Débit massique en (kg/s)

ρ : Masse volumique en (kg/m³)

A : Section de la veine fluide en (m²)

V : Vitesse moyenne du fluide à travers (S) en (m/s).

3.4.2. Débit volumique

Le débit volumique d'une veine fluide est la limite du rapport $\frac{dV}{dt}$ quand dt tend vers 0.

$$q_v = \frac{dV}{dt}$$

Où :

- q_v : Volume de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite.

- dV : Volume élémentaire, en (m³), ayant traversé une surface S pendant un intervalle de temps dt ,

- dt : Intervalle de temps en secondes (s),

On a aussi :

$$q_v = \frac{q_m}{\rho}$$

Soit :

$$q_v = V \cdot A$$

3.5. Théorème de Bernoulli (Ecoulement sans échange de travail)

Reprenons le schéma de la veine fluide (**Fig. 14**) du paragraphe précédent avec les mêmes notations et les hypothèses suivantes :

- Le fluide est parfait et incompressible.
- L'écoulement est permanent.
- L'écoulement est dans une conduite parfaitement lisse.

On considère l'axe Oz vertical dirigé vers le haut. On note Z_1 , Z_2 et Z respectivement les hauteurs des centres de gravité des masses dm_1 , dm_2 et m . On désigne par F_1 et F_2 respectivement les normes des forces de pression du fluide agissant au niveau des sections S_1 et S_2 .

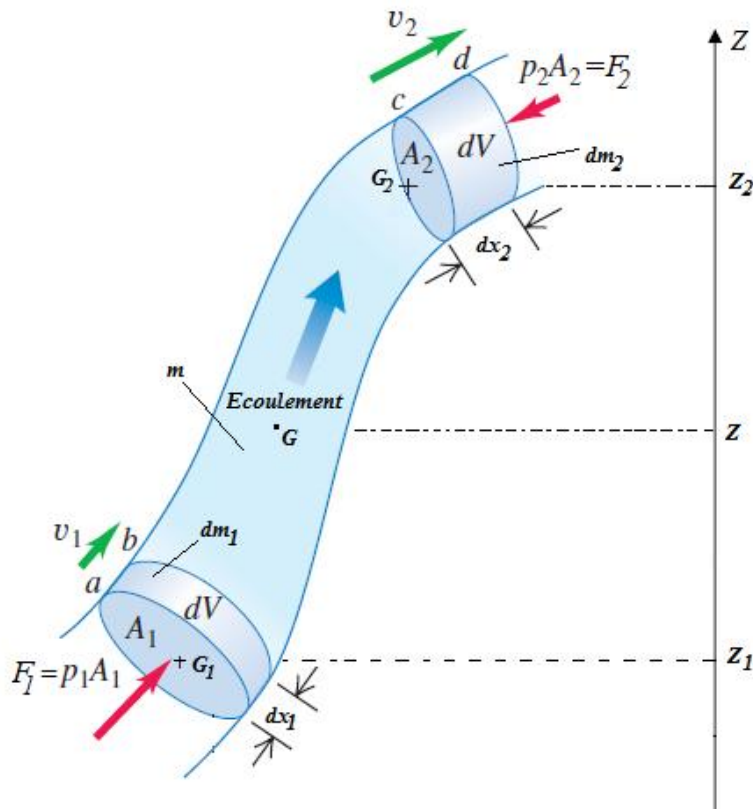


Figure 14. Veine de Fluide en mouvement

A l'instant t , le fluide de masse $(dm_1 + m)$ est compris entre les sections A_1 et A_2 . Son énergie mécanique est exprimée comme suit :

$$E_M = E_{Pot} + E_{Cin}$$

$$dm_1 \cdot g \cdot Z_1 + m \cdot g \cdot Z + \frac{1}{2} dm_1 \cdot V_1^2 + \int_{s_1}^{s_2} \frac{dm \cdot V^2}{2}$$

A l'instant $t' = (t + dt)$ le fluide de masse $(m + dm_2)$ est compris entre A'_1 et A'_2 . Son énergie mécanique est :

$$E'_M = E'_{Pot} + E'_{Cin}$$

$$m \cdot g \cdot Z + dm_2 \cdot g \cdot Z_2 + \int_{s_1}^{s_2} \frac{dm \cdot V^2}{2} + \frac{1}{2} dm_2 \cdot V_2^2$$

On applique le théorème de l'énergie mécanique au fluide entre t et t' :

La variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces extérieures.

$$E'_{mec} - E_{mec} = W_{Forces\ de\ pression}$$

Le travail des forces pressantes sur l'élément fluide est :

$$W_{Fp} = F_1 \cdot dx_1 - F_2 \cdot dx_2$$

On a alors,

$$E'_{mec} - E_{mec} = W_{Fp} = p_1 \cdot A_1 \cdot dx_1 - p_2 \cdot A_2 \cdot dx_2 = p_1 \cdot dV_1 - p_2 \cdot dV_2$$

$$dm_2 \cdot g \cdot Z_2 + \frac{1}{2} dm_2 \cdot V_2^2 - dm_1 \cdot g \cdot Z_1 - \frac{1}{2} dm_1 \cdot V_1^2 = \underbrace{p_1}_{\dots_1} dm_1 - \underbrace{p_2}_{\dots_2} dm_2$$

Par conservation de masse : $dm_1 = dm_2 = dm$ et puisque le fluide est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$,

On aboutit à **l'équation de Bernoulli** :

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho \cdot g} + \frac{1}{2 \cdot g} (V_2^2 - V_1^2) + (Z_2 - Z_1) = 0$$

On remarque que, si $V=0$ (pas de mouvement), on retrouve la relation fondamentale de la statique des fluides :

$$\Delta p = \rho \cdot g \cdot \Delta Z$$

3.6. Applications de l'équation de Bernoulli

3.6.1. Vidange d'un réservoir

Considérons un réservoir (**Fig. 15**) contenant un liquide et dont la paroi verticale est percée d'un petit orifice à une distance h de la surface du liquide. On suppose les dimensions du réservoir suffisamment grandes, la surface du réservoir S_1 et celle de l'orifice $S_2 \ll S_1$ sont exposées à l'air. D'où, on peut négliger les variations du niveau de la surface libre et considérer que la vitesse $V_1 \approx 0$.

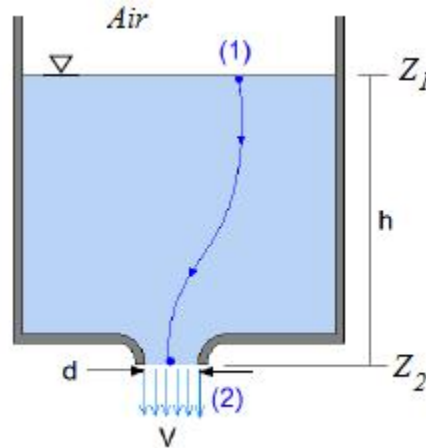


Figure 15. Vidange d'un réservoir

Appliquons l'équation de Bernoulli entre les 02 points ① et ② du réservoir, on écrit :

$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} + Z_1 = \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} + Z_2$$

On a : $Q = V_1 \cdot S_1 = V_2 \cdot S_2$

$$p_1 = p_2 = p_a$$

$$h = Z_1 - Z_2$$

$$V_1 \approx 0 \quad (S_1 \gg S_2) \text{ D'où : } V_2 \ll V_1$$

Il vient donc,

$$V_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

V_2 : est une vitesse théorique V_{th} .

Par conséquent, le débit théorique du liquide recueilli à l'orifice à section S_2 , est donné par :

$$Q_{th} = V_2 \cdot S_2 = S_2 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

En réalité, à causes des forces des frottements fluide-solide, une contraction de la section de vidange est générée, par conséquent, la vitesse de vidange réelle est inférieure à celle obtenue théoriquement.

$$V_r = c_v \cdot V_{th} \quad ; \quad c_v < 1 \text{ (Coeff. de vitesse)}$$

La section du fluide à la sortie de l'orifice est :

$$A_r = c_c \cdot A_{th} \quad ; \quad c_c < 1 \text{ (Coef. de contraction)}$$

$$\text{Donc, } Q_r = A_r \cdot V_r = c_c \cdot c_v \cdot A_{th} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

$$Q_r = A_r \cdot V_r = c_D \cdot A_{th} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = c_D \cdot Q_{th} \quad ; \quad c_D = c_v \cdot c_c < 1 \text{ (Coeff. de débit)}$$

Temps de vidange total du réservoir :

A un instant (t) donné, on a :

$$q_{V_r} = -\frac{dV}{dt} = c_D \cdot A_{th} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

Pendant (dt), Z varie de (dz)

La variation en volume (V) est $dV = A \cdot dz$

$$t_v = \frac{2 \cdot A \cdot h}{c_D \cdot A_{th} \sqrt{2 \cdot g \cdot h}}$$

3.6.2. Tube de Pitot

On considère un liquide en écoulement permanent dans une canalisation et deux tubes plongeant dans le liquide, l'un débouchant en A face au courant, et l'autre en B est le long des lignes de courant, les deux extrémités étant à la même hauteur. Au point B , le liquide a la même vitesse V que dans la canalisation et la pression est la même que celle du liquide $p_B = p$.

En A , point d'arrêt, la vitesse est nulle et la pression est p_A .

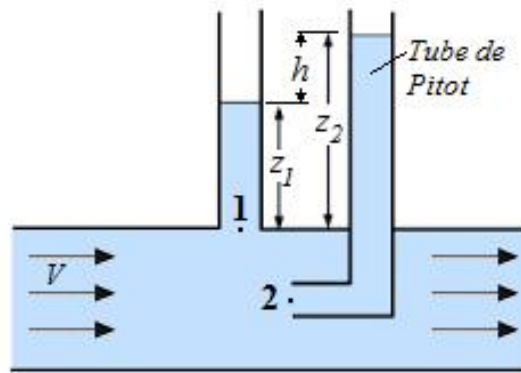


Figure 16. *Tube de Pitot*

Appliquons le théorème de Bernoulli, entre les deux points (1) et (2), on obtient :

$$\frac{p_1}{\dots g} + \frac{v_1^2}{2.g} + z_1 = \frac{p_2}{\dots g} + \frac{v_2^2}{2.g} + z_2$$

On a : $z_1 = z_2$

Et $V_1=0$ (point d'arrêt)

Alors, il vient :

$$\frac{p_1 - p_2}{\dots g} = \frac{v_2^2}{2.g}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2.(p_1 - p_2)}{\dots}}$$

De l'hydrostatique, on a : $p_1 - p_2 = \dots.g.h$

Ce qui donne : $v_2 = \sqrt{2.g.h}$

3.6.3. Tube de Venturi

Un conduit de section principale S_A subit un étranglement en B où sa section est S_B . La vitesse d'un fluide augmente dans l'étranglement, donc sa pression y diminue :

$$V_2 > V_1 \Rightarrow p_2 < p_1$$

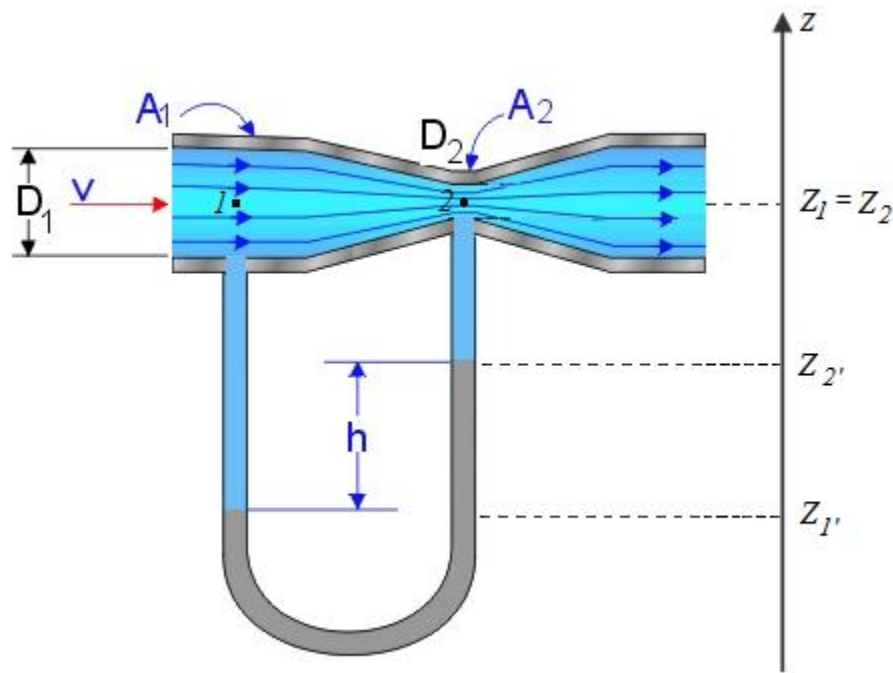


Figure 17. Tube de Venturi

Le théorème de Bernoulli s'écrit ici :

$$\frac{p_1}{\dots \cdot g} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} + z_1 = \frac{p_2}{\dots \cdot g} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g} + z_2$$

D'après l'équation de continuité,

$$Q_V = v_2 \cdot A_2 = v_1 \cdot A_1$$

D'après la **Fig. 17**. On remarque que : $A_2 < A_1 \Rightarrow v_2 > v_1$ Donc : $p_1 > p_2$

$$p_1 - p_2 = \frac{\dots (v_2^2 - v_1^2)}{2} = \frac{\dots}{2} \cdot v_2^2 \left(1 - \frac{v_1^2}{v_2^2} \right) \quad / \quad v_1 = \frac{v_2 \cdot A_2}{A_1}$$

$$p_1 - p_2 = \frac{\dots}{2} \cdot v_2^2 \left(1 - \frac{A_2^2}{A_1^2} \right)$$

$$= \frac{\dots}{2} \left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2} \right) \cdot Q_V^2$$

D'où :

$$p_1 - p_2 = k \cdot Q_v^2$$

La différence de pression aux bornes (aux extrémités) du tube de Venturi est proportionnelle au carré du débit.

3.6.4. Diaphragme

Le diaphragme est utilisé comme instrument de mesure de débit d'un fluide parcourant un circuit hydraulique. Il existe, pour un débit donné, une différence de hauteur dans les tubes avant et après le diaphragme.

L'étude consiste à établir une relation entre le débit d'eau Q traversant le diaphragme et la différence de hauteur d'eau (h) dans les tubes.

De l'équation de continuité pour un fluide parfait incompressible, le débit du fluide est le même à travers toutes les sections des tubes.

On écrit : $Q = A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 = S \cdot v$

D'où : $v_1 = \frac{S}{S_1} v$

On applique l'équation de Bernoulli exprimée en hauteur piézométrique entre les points 1 et 2.

$$\frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g}$$

Le tube est horizontal, il vient donc : $z_1 = z_2 = z$

On obtient : $\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g}$

Ou encore $\frac{p_1 - p}{\rho g} = \frac{v^2 - v_1^2}{2g} = h$

Avec, h est la différence de hauteur dans les tubes avant et après le diaphragme.

Puis,

$$v^2 \left(1 - \left(\frac{S}{S_1} \right)^2 \right) = 2gh$$

D'où :

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - \left(\frac{S}{S_1} \right)^2}}$$

La relation du débit devient :

$$Q = \frac{S}{\sqrt{1 - \left(\frac{S}{S_1} \right)^2}} \sqrt{2gh}$$

La mesure n'a pas lieu en **B** où il se produit une contraction de la veine fluide, mais en **C**. Pour tenir compte de la section en **C**, il faut utiliser un coefficient de contraction C_C .

Le débit réel s'écrit finalement :

$$Q_R = C_C \cdot Q_{th}$$

$$Q_R = C_C \frac{S}{\sqrt{1 - \left(\frac{S}{S_1} \right)^2}} \sqrt{2gh}$$

3.7. Théorème de Bernoulli (Ecoulement avec échange de travail)

Lorsque le fluide traverse une machine hydraulique (**Fig. 18**), il échange de l'énergie avec cette machine sous forme de travail (ΔW) pendant une durée (Δt).

La puissance P échangée est :

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad [\text{Watt}]$$

$P > 0$ si l'énergie est reçue par le fluide (cas de pompe) ;

$P < 0$ si l'énergie est fourni par le fluide (cas de turbine) ;

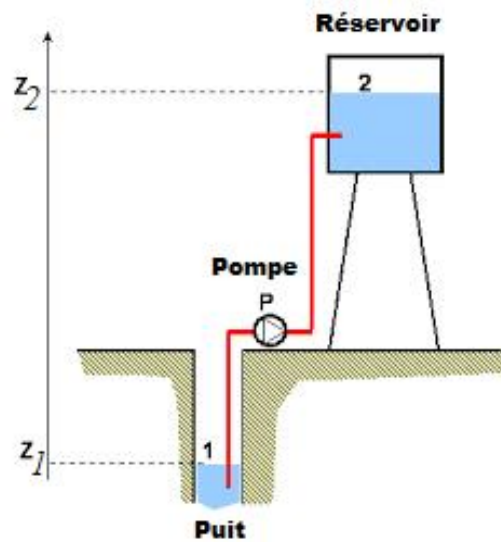


Figure 18. *Un fluide traversant une pompe hydraulique*

L'application de l'équation de Bernoulli entre les points ① et ② permet d'écrire :

$$\frac{1}{2} \dots (v_2^2 - v_1^2) + \dots g \cdot (z_2 - z_1) + (p_2 - p_1) = \frac{P}{Q_v}$$

3.8. Théorème d'Euler

Une application directe du théorème d'Euler est l'évaluation des forces exercées par les jets d'eau. Celles-ci sont exploitées dans divers domaines : production de l'énergie électrique à partir de l'énergie hydraulique grâce aux turbines, coupe des matériaux, etc. Le théorème d'Euler résulte de l'application du théorème de quantité de mouvement à l'écoulement d'un fluide :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Avec : $\vec{P} = m \cdot \vec{V}_G$ quantité de mouvement

Ce théorème permet de déterminer les efforts exercés par le fluide en mouvement sur les objets qui les environnent.

Enoncé :

La résultante (F_{ext}) des forces mécaniques extérieures exercées sur un fluide isolé (fluide contenu dans l'enveloppe, voir **Fig. 19.**) limitée par les sections 1 et 2 est égale à la variation de

la quantité de mouvement du fluide qui entre en S_1 à une vitesse \vec{V}_1 et sort par la section S_2 à une vitesse \vec{V}_2 . Elle est exprimée par la relation suivante :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \dot{m}(\vec{V}_2 - \vec{V}_1)$$

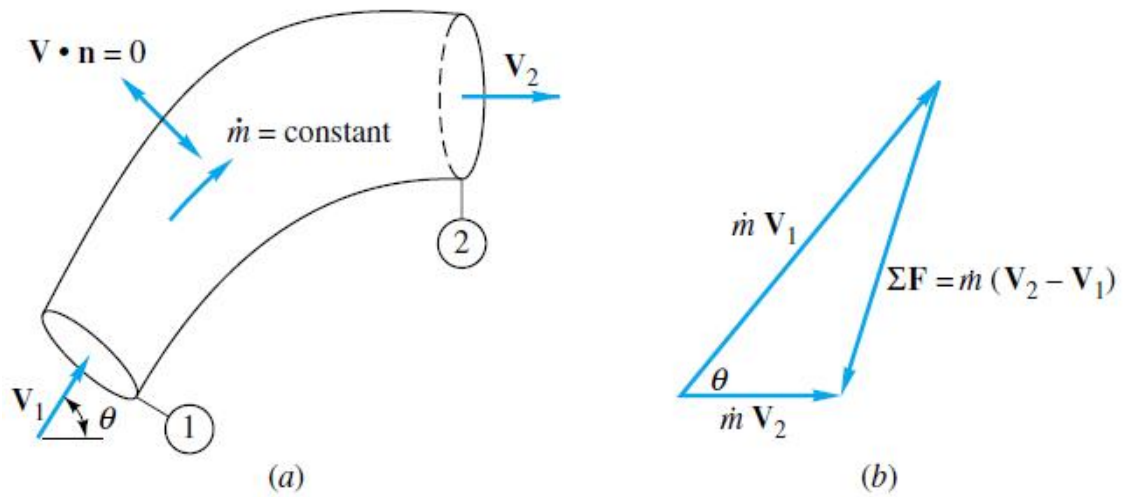


Figure 19. Force sur un tube de courant unidimensionnel avec débit constant :
 (a) tube de courant en écoulement permanent ; (b) triangle des forces

CHAPITRE 4 :

DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES REELS

4.1. Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle a pour rôle de souligner l'importance des unités en sciences physiques qui donnent un arrangement précis à toutes les formules littérales, fournit des méthodes pour choisir les grandeurs appropriées et leur bonne présentation. L'analyse dimensionnelle est un outil théorique servant à interpréter les problèmes à partir des dimensions des grandeurs physiques mises en jeu. Lors de l'établissement d'une expression, l'analyse dimensionnelle permet de vérifier son homogénéité et de la corriger le cas échéant, sachant qu'une expression non homogène ne peut être que fausse. C'est une technique très utile dans tous les domaines expérimentaux de l'ingénierie. S'il est possible d'identifier les grandeurs impliquées dans un phénomène physique, l'analyse dimensionnelle peut fournir une équation reliant toutes les grandeurs physiques impliqués les uns aux autres.

4.2. Dimensions, unités et système international

Les grandeurs physiques qui décrivent un phénomène physique sont caractérisées par leur dimension. Une grandeur peut avoir la dimension d'une longueur, d'une énergie, d'une masse, d'une vitesse, etc...La notion de dimension est très générale, et ne suppose aucun choix particulier d'unité. Le système international (SI) compte sept unités de base (voir **Table n°1**) censées quantifier des grandeurs physiques indépendantes. Chaque unité à un symbole.

Table 1. Les unités de base du système SI

Grandeur physique	Dimension	Unité SI
Longueur	L	Le mètre (m)
Masse	M	Le kilogramme (kg)
Temps	T	La seconde (s)
Courant électrique	I	L'ampère (A)
Température	θ	Le kelvin (K)
Quantité de matière	N	La mole (mol)
Intensité lumineuse	J	La candela (cd)

4.3. Théorème de Vaschy-Buckingham

L'analyse dimensionnelle des résultats expérimentaux des problèmes de mécanique des fluides peu connus conduit à certaines grandeurs adimensionnelles. Ces grandeurs (nombres) sans dimension sont souvent appelés π . Sur la base de la notion d'homogénéité dimensionnelle, ces paramètres sans dimension peuvent être groupés et exprimés sous des formes fonctionnelles. Cette idée a été présentée par Buckingham (1867-1940) dont théorème porte son nom.

Le théorème de *Vaschy et Buckingham*, appelé aussi « *théorème π* », énonce que :

Soit un problème physique comportant n grandeurs différentes (variables) ($A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$), comme la vitesse, la pression, la viscosité, etc. dont les dimensions fondamentales desquelles interviennent sont m . Il existe une relation qui relie toutes ces quantités entre elles, cette relation s'écrit :

$$W(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n) = 0$$

Si f_1, f_2, f_3, \dots , représentent les nombres adimensionnelles parmi les quantités physiques $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, on peut alors exprimer la relation précédente sous la forme d'une équation à $(n-m)$ nombres sans dimensions, de la forme :

$$f(f_1, f_2, f_3, \dots, f_{n-m}) = 0$$

Où

$$f_1 = f(f_2, f_3, \dots, f_{n-m}) = 0$$

4.4. Les étapes de l'analyse dimensionnelle

Pour réaliser une analyse dimensionnelle, on doit considérer les neuf étapes suivantes :

1. Dresser la liste de toutes les grandeurs physiques (A_i) et leur dimension correspondante.
Omettre toute grandeur physique dépendantes d'une ou d'autres grandeurs.

2. Écrire la fonction

$$W(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n) = 0$$

3. Choisir les variables répétitives. Ces variables doivent contenir toutes les m dimensions du problème. Souvent, on retient une variable parce qu'elle détermine l'échelle, une autre, parce qu'elle détermine les conditions cinématiques ; il faut une variable liée avec la masse ou les forces du système.

4. Écrire les paramètres π en fonction des exposants inconnus :

$$f_1 = V^{x_1} D^{y_1} \dots z_1 \sim \left(\frac{L}{T}\right)^{x_1} L^{y_1} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{z_1} \left(\frac{M}{LT}\right) = M^0 L^0 T^0$$

S'assurer que toutes les quantités A_i sont incluses dans les groupes f_i .

5. Écrire les équations des paramètres π pour les exposants ; on doit obtenir une somme algébrique nulle pour chaque dimension (homogénéité).
6. Résoudre les équations simultanément.
7. Remplacer les exposants trouvés (x_1, y_1, z_1, \dots) dans les expressions de π (formulées en étape 4) pour obtenir les grandeurs π sans dimension.
8. Déterminer la fonction :

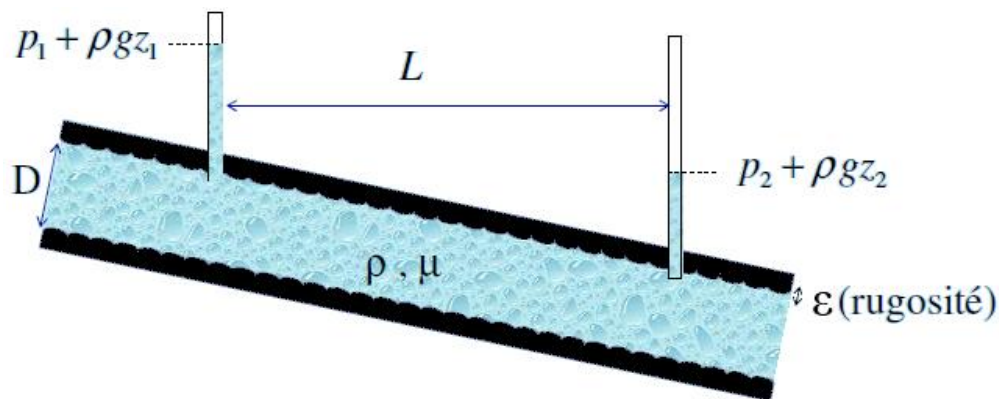
$$f(f_1, f_2, f_3, \dots, f_{n-m}) = 0$$

S'assurer que tous les paramètres π sont indépendants les uns des autres.

9. Mettre les résultats sous la forme de nombres sans dimension connus (Re, Ma, Fr , etc.).

4.5. Exemple d'analyse dimensionnelle dans la mécanique des fluides

Les pertes de charge dans une conduite cylindrique rugueuse



En utilisant le théorème de Vaschy-Buckingham, proposer une relation pour présenter les résultats expérimentaux en fonction de paramètres adimensionnels.

Solution :

1) Inventaire des variables et de leurs dimensions

Variable	Symbole	Dimension
Perte de charge par unité de longueur	p/l (Pa/m)	$ML^{-2}T^{-2}$
Diamètre de la conduite	D (m)	L
Masse volumique du fluide	(kg/m ³)	ML^{-3}
Viscosité dynamique	μ (Pa.s)	$ML^{-1}T^{-1}$
Vitesse moyenne de l'écoulement	U (m/s)	LT^{-1}
Rugosité absolue de surface de la conduite	(m)	L

2) Formulation de la fonction algébrique : $\frac{\Delta p}{l} = f(D, \dots, \mu, U, \nu)$

3) Détermination du nombre des grandeurs adimensionnelles

On a 7 grandeurs avec trois dimensions (MLT). On déduit donc ($7 - 3 = 4$) paramètres π , soient:

π_1, π_2, π_3 et π_4

Si on prend : V, D et \dots comme variables qui se répètent (car les trois contiennent les dimensions fondamentales MLT).

4) Écriture des paramètres f en fonction des exposants inconnus :

Les nombres π qu'on peut former sont les suivants :

$$f_1 = V^{x_1} D^{y_1} \dots z_1 \Delta p = M^0 L^0 T^0$$

$$f_2 = V^{x_2} D^{y_2} \dots z_2 l = M^0 L^0 T^0$$

$$f_3 = V^{x_3} D^{y_3} \dots z_3 \nu = M^0 L^0 T^0$$

$$f_4 = V^{x_4} D^{y_4} \dots z_4 \sim = M^0 L^0 T^0$$

5) Écriture d'équations des paramètres f pour les exposants

Les nombres π exprimés en termes de dimensions sont les suivants :

$$f_1 = \left(\frac{L}{T}\right)^{x_1} L^{y_1} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{z_1} \left(\frac{M}{LT^2}\right) = M^0 L^0 T^0$$

$$f_2 = \left(\frac{L}{T}\right)^{x_2} L^{y_2} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{z_2} L = M^0 L^0 T^0$$

$$f_3 = \left(\frac{L}{T}\right)^{x_3} L^{y_3} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{z_3} L = M^0 L^0 T^0$$

$$f_4 = \left(\frac{L}{T}\right)^{x_4} L^{y_4} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{z_4} \left(\frac{M}{LT}\right) = M^0 L^0 T^0$$

6, 7) Résolution des équations et remplacement des exposants (x_1, y_1, z_1, \dots) dans les expressions de f

$$f_1 = M^{(z_1+1)} L^{(x_1+y_1-3z_1-1)} T^{(-x_1-2)} = M^0 L^0 T^0$$

On obtient, $z_1 = -1, y_1 = 0, x_1 = -2$

Donc, $f_1 = \frac{\Delta p}{\dots V^2}$

$$f_2 = M^{(z_2)} L^{(x_2+y_2-3z_2+1)} T^{(-x_2)} = M^0 L^0 T^0$$

On obtient, $z_2 = 0, y_2 = -1, x_2 = 0$

Donc, $f_2 = \frac{l}{D}$

De la même manière, on obtient :

$$f_3 = \frac{v}{D} \quad \text{Ainsi que : } f_4 = \frac{\sim}{\dots VD} = \frac{1}{\text{Re}}$$

8) L'écriture de la relation finale :

La relation finale est : $f_1 = f(f_2, f_3, f_4)$

Où :

$$\frac{\Delta p}{\dots V^2} = f\left(\frac{l}{D}, \frac{v}{D}, \frac{1}{\text{Re}}\right)$$

4.6. Les régimes d'écoulement

Les expériences réalisées par **Reynolds** (1883) lors de l'écoulement d'un liquide dans une conduite cylindrique rectiligne dans laquelle arrive également un filet de liquide coloré, ont montré l'existence de trois régimes d'écoulement : **laminaire**, **transitoire** et **turbulent**.

L'**écoulement laminaire** (**Fig. 6.a.**) est caractérisé par une seule direction (composante) de vitesse (vecteurs vitesse parallèles), un **écoulement turbulent** (**Fig. 6.2.**) est caractérisé par des tourbillons dans le fluide, le passage du régime laminaire au régime turbulent est dit régime d'**écoulement transitoire** (voir **Fig. 6.c.**).

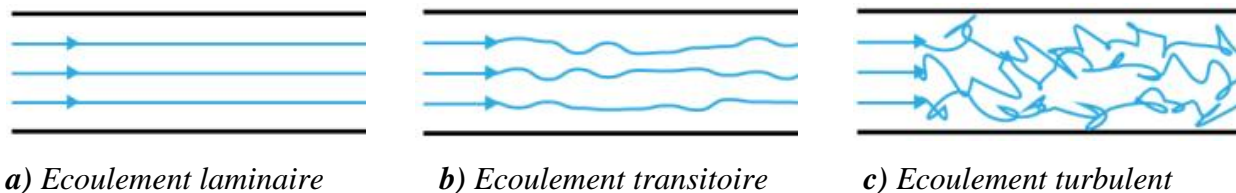


Figure 6. Les différents régimes d'écoulements des fluides

En utilisant des fluides divers (viscosité différente), en faisant varier le débit et le diamètre de la canalisation, Reynolds a montré que le paramètre qui permettait de déterminer si l'écoulement est laminaire ou turbulent est un **nombre sans dimension appelé nombre de Reynolds**.

4.7. Nombre de Reynolds

Il permet de déterminer le régime d'écoulement du fluide. Il est donné par la relation suivante :

$$R_e = \frac{V.D}{\epsilon}$$

Où : $R_e = \frac{V.D}{\epsilon}$

Avec :

- V : vitesse d'écoulement (m/s)
- d : diamètre du conduit (m)
- 1 ϵ : viscosité cinématique (m²/s)
- μ : viscosité dynamique (N.s/m²)
- ρ : masse volumique du fluide (kg/m³)

D'après la relation ci-dessus, le nombre de Reynolds représente une balance entre les forces d'inertie et les forces visqueuses (forces de frottement).

De l'expérience, Il est montré que pour un écoulement dans une conduite, que :

*Si $R < 2000$: l'écoulement est **laminaire**.*

*Si $R > 3000$: l'écoulement est **turbulent**.*

*Si $2000 < R < 3000$: l'écoulement est **transitoire**.*

Ces valeurs doivent être considérées comme des ordres de grandeur, le passage d'un type d'écoulement à un autre se fait progressivement.

4.8. Les pertes de charges

4.8.1. Le phénomène

a) Observations

- ✓ La pression d'un liquide réel diminue tout au long d'une canalisation dans laquelle il s'écoule, même si elle est horizontale et de section uniforme, contrairement au théorème de Bernoulli.
- ✓ La pression d'un fluide réel diminue après le passage à travers un coude, une vanne ou un rétrécissement.

b) Conclusion

Un **fluide réel**, en **mouvement**, subit des **pertes d'énergie** dues aux frottements sur les parois de la canalisation (***pertes de charge linéaires***) ou sur les "accidents" de parcours (***pertes de charge singulières***).

4.8.2. Influence des différentes grandeurs sur les pertes de charge

Lorsqu'on considère un fluide réel, les pertes d'énergie spécifiques ou bien comme on les appelle souvent, les **pertes de charges** dépendent de la forme, des dimensions et de la rugosité de la canalisation, de la vitesse d'écoulement et de la viscosité du fluide mais non de la valeur absolue de la pression qui règne dans le fluide.

La différence de pression : $p = p_1 - p_2$ entre deux points (1) et (2) d'un circuit hydraulique a pour origine (voir **Fig.2**) :

- ✓ Les frottements du fluide sur la paroi interne de la tuyauterie ; on les appelle **pertes de charge linéaires ou systématiques**.

- ✓ La résistance à l'écoulement provoquée par les accidents de parcours (coudes, élargissements ou rétrécissement de la section, organes de réglage, etc.) ; ce sont les **pertes de charge singulières**.

Le problème de calcul de ces pertes de charge met en présence les principales grandeurs suivantes :

- Le fluide** caractérisé par :
- sa masse volumique ρ .
 - sa viscosité cinématique ν .
- La conduite** caractérisée par :
- sa section (sa forme) en général circulaire (diamètre D).
 - sa longueur L .
 - sa rugosité ν (hauteur moyenne des aspérités de la paroi).

Ces éléments sont liés par des grandeurs comme la vitesse moyenne d'écoulement V ou le débit Q et le nombre de Reynolds (Re) qui joue un rôle primordial dans le calcul des pertes de charge.

4.8.3. Pertes de charge linéaires

4.8.3.1. Généralités

Ce genre de perte est causé par le frottement intérieur qui se produit dans les fluides ; il se rencontre dans les conduits **lisses** aussi bien que dans les conduits **rugueux**.

Lors de l'écoulement d'un fluide réel incompressible, entre deux points distants d'une longueur L , dans une conduite de diamètre D apparaît une perte de pression p , exprimée sous la forme suivante :

$$\Delta p = f \frac{\rho V^2 L}{2 D} \quad \text{Equation de Darcy-Weisbach (Différence de pression)}$$

Cette relation peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\Delta h = f \frac{V^2 L}{2 g D} \quad (\text{Différence de hauteur})$$

Avec,

f : est un coefficient sans dimension appelé **coefficient de perte de charge** (Coeff. de frottement)

Le calcul des pertes de charge repose entièrement sur la détermination de ce coefficient f .

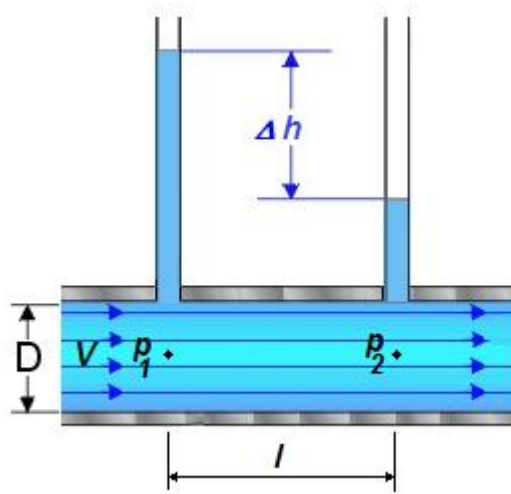


Figure 2. Pertes de charge dans une conduite

4.8.3.2. Cas des écoulements laminaires : $Re < 2000$

Dans ce cas, on peut montrer que le coefficient λ est uniquement fonction du nombre de Reynolds Re ; l'état de la surface n'intervient pas et donc λ ne dépend pas de ε (hauteurs moyennes des aspérités du tuyau), ni de la nature de la tuyauterie.

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (\text{Relation de Poiseuille})$$

L'expression de Δh devient alors :

$$\Delta h = \lambda \frac{V^2}{2g} \frac{L}{D} = \frac{64}{Re} \frac{V^2}{2g} \frac{L}{D} = \frac{32 \mu V L}{\rho g D^2}$$

$$\Delta h = \frac{32 \mu V L}{\rho g D^2}$$

Il est alors immédiat de voir que Δh est proportionnel à la vitesse V et donc au débit Q , ainsi qu'à la viscosité cinématique ν .

4.8.3.3. Cas des écoulements turbulents : $Re > 3000$

Dans ce régime, les écoulements sont beaucoup plus complexes et la détermination du coefficient de perte de charge résulte des mesures expérimentales. C'est ce qui explique la diversité des formules qui ont été proposées pour sa détermination.

En régime turbulent l'état de la surface devient sensible et son influence est d'autant plus grande que le nombre de Reynolds Re est grand. Toutes les études ont montré l'influence de la rugosité

et elles s'ont attachées par la suite à chercher la variation du coefficient λ en fonction du nombre de Reynolds Re et de la rugosité v de la conduite.

La formule de **Colebrook-White** est actuellement considérée comme celle qui traduit le mieux les phénomènes d'écoulement en régime turbulent. Elle est présentée sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{v}{3.7D} + \frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda}} \right)$$

L'utilisation directe de cette formule demanderait, du fait de sa forme implicite, un calcul par approximations successives, on emploie aussi en pratique des diagrammes (abaques), voir **Fig. 3**. Pour simplifier la relation précédente, on peut chercher à savoir si l'écoulement est **hydrauliquement lisse** ou **rugueux** pour évaluer la prédominance des deux termes entre parenthèses dans la relation de **Colebrook-White**.

Remarque :

Pour le calcul du coefficient de perte de charge λ , On utilise souvent des formules empiriques plus simples valables pour des cas particuliers et dans un certain domaine du nombre de Reynolds, par exemple :

Pour un **régime hydrauliquement lisse**

✓ **Formule de Blasius** : $(3000 < Re < 10^5)$, $\lambda = 0.316 Re^{-0.25}$

✓ **Relation de Karman-Nikuradzé** : $(10^5 < Re < 10^8)$, $\lambda = 0.0032 + 0.221 Re^{-0.237}$

Pour un **régime hydrauliquement intermédiaire**

✓ **Relation de Churchill** : $\frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda}{2}}} = 2.457 \cdot \ln \left[\left(\frac{7}{Re} \right)^{0.9} + 0.27 \frac{v}{D} \right]$

Pour un **régime hydrauliquement rugueux**

✓ **2^{ème} relation de Nikuradzé** : $\frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda}{2}}} = 2.46 \cdot \ln \left[\left(\frac{R}{v} \right) + 4.92 \right]$

4.8.3.4. Diagramme de Moody

En pratique, on utilise le diagramme de Moody qui représente le coefficient de perte de charge en fonction du nombre de Reynolds Re et de la rugosité relative (v/D) .

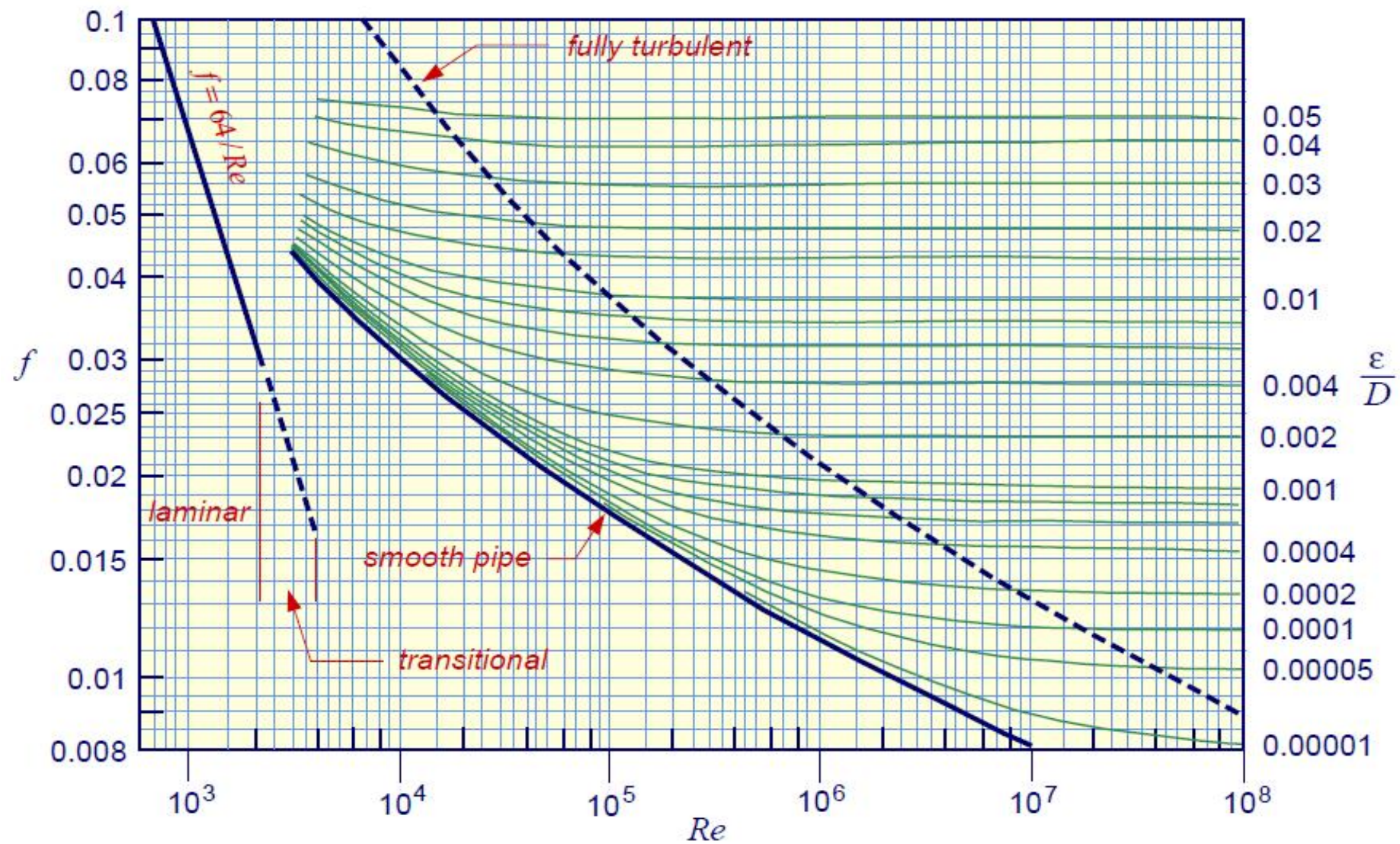


Figure 3. *Diagramme de Moody*

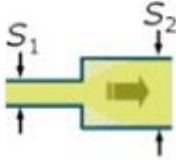
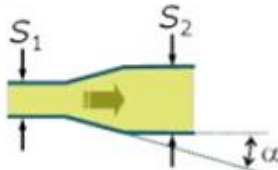
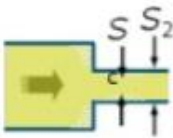
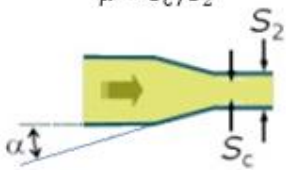

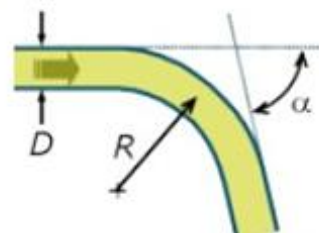
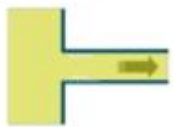
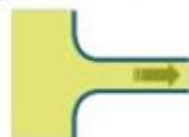
4.8.4. Pertes de charge singulières

D'après les expériences, il est montré dans beaucoup de cas que, les pertes de charge singulières sont proportionnelles au carré de la vitesse et sont exprimées par la relation suivante :

$$\Delta p = K \frac{\rho V^2}{2} \quad \text{Où en termes de hauteur :} \quad \Delta h = K \frac{V^2}{2g}$$

K : est le coefficient de perte de charge singulière, il est fonction de la singularité géométrique et du nombre de Reynolds. La détermination de ce coefficient est principalement du domaine de l'expérience. Le coefficient K est donné pour différentes configurations pratiques dans la **table 1** suivante :

Table 1. Quelques singularités typiques avec les coefficients de perte de charge associés.

Elargissement brusque $K = (1 - S_1/S_2)^2$ 	Divergent $K = (1 - S_1/S_2)^2 \sin \alpha$ 
Rétrécissement brusque $K = (1/\mu - 1)^2$ $\mu = S_c/S_2$ 	Convergent $K = (1/\mu - 1)^2 \sin \alpha$ $\mu = S_c/S_2$ 
Coude brusque $K = \sin^2 \alpha + 2 \sin^4 \frac{\alpha}{2}$ 	Coude arrondi $K = \frac{\alpha}{\pi} [0,131 + 1,847(D/R)^{7/2}]$ 
Entrée brusque d'un canal $K = 0,5$ 	Entrée progressive d'un canal $K = 0,04$ 

4.9. Théorème de Bernoulli généralisé

Lors d'un écoulement d'un fluide réel entre les points (1) et (2) il peut y avoir des *échanges d'énergie* entre ce fluide et le milieu extérieur :

- ✓ par **travail à travers une machine**, pompe ou turbine ; la puissance échangée étant P (voir Théorème de Bernoulli § 3.5)
- ✓ par **pertes de charge** dues aux frottements du fluide sur les parois ou les accidents de parcours ; la différence de pression étant p (voir ci-dessus § 4.2).

Le théorème de Bernoulli s'écrit alors sous la forme générale :

$$\frac{1}{2} \dots (V_2^2 - V_1^2) + \dots g(z_2 - z_1) + (p_2 - p_1) = \frac{\sum P}{Q_v} - \Delta p$$

Avec :

- ✓ P : somme des puissances échangées entre le fluide et le milieu extérieur, à travers une machine, entre les points (1) et (2) :
 - $P > 0$ si le fluide reçoit de l'énergie de la machine (pompe),
 - $P < 0$ si le fluide fournit de l'énergie à la machine (turbine),
 - $P = 0$ s'il n'y a pas de machine entre (1) et (2).
- ✓ p : somme des pertes de charge entre les points (1) et (2).

Références bibliographiques

- [1] Y. Cengel and J. Cimbala, Fluid mechanics Fundamentals and applications, 3rd edition, McGraw Hill, 2001.
- [2] R. Ouziaux, J. Perrier, Mécanique des fluides appliquée, DUNOD, Paris, 1998.
- [3] Frank M. White, Fluid mechanics, 4th edition, McGraw Hill, Inc. New York, 1999.
- [4] M. Carlier, Hydraulique générale et appliquée, 3^{ème} édition, Eyrolles, Paris, 1986.
- [5] Bruce R. Munson, Donald F. Young, Theodore H. Okiishi, Wade W. Huebsch, Fundamentals of fluid mechanics, 6th edition, John Wiley & Sons, Inc. United States of America.
- [6] R. K. Bansal, A Textbook of Fluid Mechanics and Hydraulic Machines, 9th edition, LP.
- [7] Andrew Sleigh, An Introduction to Fluid Mechanics, School of Civil Engineering, University of Leeds. May 2001.
- [8] J. M. McDonough, Lectures in elementary fluid dynamics: Physics, Mathematics and Applications, Departments of Mechanical Engineering and Mathematics, University of Kentucky, Lexington, KY, 5th edition, 2009.

Annexe

Unités et conversions

Nom	Symbole	Dimensions	Unité SI	Autres unités	
				Nom, symbole	Valeur en SI
Longueur	L	L	mètre (m)	pouce (in) pied (ft)	2.54x10 ⁻² m 30.48x10 ⁻² m
Surface	S où A	L ²	mètre carré (m ²)	pouce carré (in ²) pied carré (ft ²)	6.451x10 ⁻⁴ m ² 9.29x10 ⁻² m ²
Volume	V	L ³	mètre cube (m ³)	litre (l)	10 ⁻³ m ³
Masse	m	M	kilogramme (kg)	tonne (t) livre (lb)	10 ³ kg 0.4536 kg
Masse volumique	ρ	ML ⁻³	kilogramme par mètre cube (kg/m ³)	gramme par centimètre cube (g/cm ³)	10 ⁻³ kg/m ³
Temps	t	T	seconde (s)	minute (min) heure (h) jour (d) année (a)	60 s 3600 s 8.64x10 ⁴ s 3.165x10 ⁷ s
Vitesse	v	LT ⁻¹	mètre par seconde (m/s)	kilomètre par heure (km/h)	0.2778 m/s
Force	F	MLT ⁻²	newton (N)	kilogramme-force	9.80665 N
Energie, travail, quantité de chaleur	W	L ² MT ⁻²	Joule (J)	calorie (cal) watt-heure (w.h) British thermal unit (Btu)	4.185 J 3600 J 1.056x10 ³ J
Puissance	P	L ² MT ⁻³	watt (w)	1 cheval vapeur (ch din)	736 w
Contrainte, pression	†, p	ML ⁻¹ T ⁻²	pascal (pa)	bar livre par pouce carré (psi)	10 ⁵ pa 6.895x10 ³ pa
Viscosité dynamique	~	LM ⁻¹ T ⁻¹	pascal-seconde (pa.s)	Poise (P)	10 ⁻¹ pa.s
Fréquence	f	T ⁻¹	hertz (hz)	cycle par seconde	1 hz
Angle plan	α	A	Radian (rad)	degré (°) tour (tr) minute (′) seconde (″)	π/180 rad 2π rad π/10800 rad π/64800 rad