MÉCANIQUE DES FLUIDES II

Dr. CHABBI AMEL

Université de BADJI MOKHTAR- ANNABA

Faculté de Technologie

Département de Génie mécanique

1.1.2

Août 2024

Table des matières

Objectifs

- Cette matière constitue une suite à la mécanique des fluides 1, elle s'intéresse à la cinématique des fluides, l'analyse basée sur le concept du volume de contrôle et à l'analyse dimensionnelle et ° similitude.
- À la fin de cette activité, l'étudiant sera capable de prédire et expliquer le mouvement d'un fluide dans un environnement bien particulier.

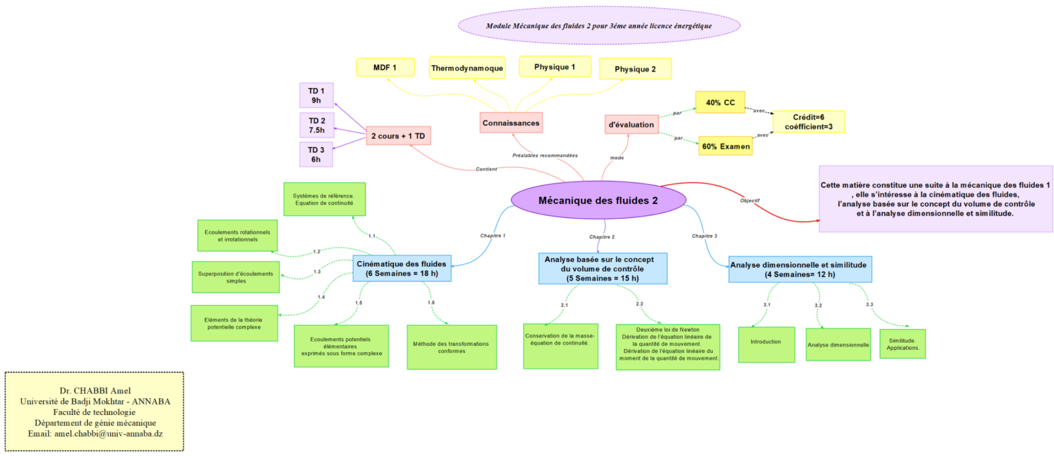
Introduction

La mécanique des fluides est la branche de la physique qui s'intéresse à la mécanique des fluides (liquides, gaz et plasmas) et aux forces qui s'exercent sur eux ; Il a des applications dans un large éventail de disciplines, y compris le génie mécanique, civil, chimique et biomédical, la géophysique, l'océanographie, la météorologie, l'astrophysique et la biologie.

Ce support de cours est dédié au programme de la mécanique des fluides II destinée aux étudiants de 3ème année licence relevant du domaine sciences et techniques. Il couvre plusieurs spécialités, particulièrement le génie mécanique, l'hydraulique et génie civil, l'aéronautique, le génie maritime, le génie climatique et plusieurs d'autres.

Ce cours est divisé en trois chapitres traitant la cinématique des fluides, la théorie de la couche limite et l'analyse dimensionnelle et similitude.

La Figure 1 est une carte conceptuelle qui montre d'une manière plus détaillée le contenu de chaque chapitre. Le plan détaillé du cours est disponible en ligne en cliquant sur "plan détaillé".



I Objectifs spécifiques

- Décrire les principes de base et les équations de la mécanique des fluides.
- Illustrer de nombreux exemples d'ingénierie du monde réel pour donner aux étudiants une idée de la façon dont la mécanique des fluides est appliquée dans la pratique de l'ingénierie.
- Développer une compréhension intuitive de la mécanique des fluides en mettant l'accent sur la physique, et en fournissant des figures attrayantes et des aides visuelles pour renforcer la physique métalliques pour arriver à interpréter les propriétés physiques et mécaniques ou à proposer des améliorations.
- Donner tous les outils dont l'apprenant a besoin pour acquérir les connaissances et la compréhension de la mécanique des fluides.

II Cinématique des Fluides

1. Introduction

Dans la cinématique des fluides, nous allons nous intéresser aux mouvements des fluides par rapport au temps, indépendamment des causes qui les provoquent, c'est-à-dire sans prendre en

compte les forces qui sont à leur source.

Un milieu fluide étant en mouvement, comment l'observer, comment le décrire ? Pour commencer, on introduit la notion de « particule fluide ».

A cette particule fluide, on attache des grandeurs cinématiques (position, vitesse, accélération) et des grandeurs thermodynamiques (masse volumique, température, pression, ...etc.).

Lors de l'écoulement d'un fluide, le mouvement peut s'effectuer dans tous les sens (en 3 dimensions) comme il peut être rotationnel ou irrotationnel.

Dans la description du milieu fluide, la particule fluide est assimilée à un point au sens mathématique du terme (c'est-à-dire avec un diamètre nul).

2. Pré-requis

L'étudiant doit avoir assimilé les concepts de base de la mathématique avant de commencer ce chapitre.

Il est recommandé aux apprenants de connaître :

- Analyse vectorielle ;
- Notions sur les différentielles ;
- Intégrales en physique ;
- Dynamique du point.

3. Exercice :

Question

[*solution* n°1 p.21]

Définir une particule de fluide

4. Exercice

[solution n°2 p.21]

Trouver la hauteur de la surface libre si 0,02 m3 d'eau sont remplies dans un réservoir de forme conique de hauteur h = 0,5 m et de rayon à la base de r = 0,25 m.

- Combien de quantité d'eau supplémentaire est nécessaire pour remplir entièrement le réservoir ?

- Si ce réservoir contient 30,5 kg d'huile, quelle est la masse volumique de cette huile ?

5. Aide de pré-requis

[cf. cours MDF 1]

6. Rappels mathématiques

Fondamental

Le rappel automatique des faits mathématiques de base, parfois appelé maîtrise des mathématiques , est généralement considéré comme une base essentielle pour les compétences mathématiques de niveau supérieur. Lorsque les apprenants disposent d'un rappel automatique des faits, ils peuvent rapidement retrouver les réponses de leur mémoire sans avoir recours à des procédures de comptage, comme compter sur les doigts.

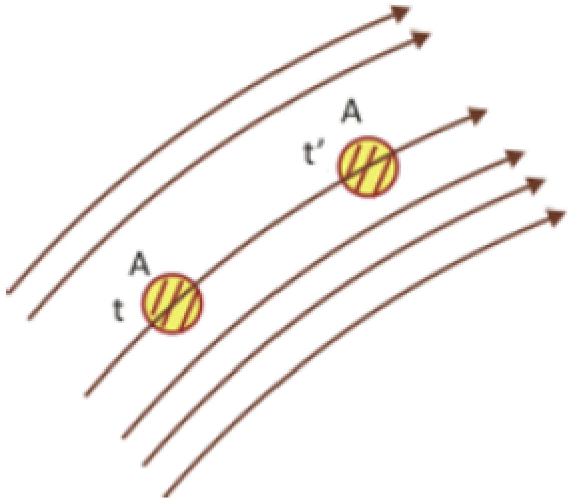
7. Description de mouvement de fluide

Rappel

Le terme fluide désigne un comportement qui s'oppose au comportement élastique ou plastique associé aux solides. Par définition, on dit que la matière est fluide lorsqu'elle se déforme aussi longtemps que lui sont appliquées des contraintes tangentielles. En termes simples on peut dire qu'un fluide coule quand un solide se déforme

Considérons l'écoulement 2D d'un fluide [2].

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j}$$



Il existe deux approches pour décrire le mouvement d'un fluide et propriétés associées.

- ***Approche Lagrangienne***
- ***Approche Eulérienne***

Attention

Si le référentiel n'est pas galiléen, il suffit d'ajouter dans le bilan des forces, les forces volumiques d'inertie.

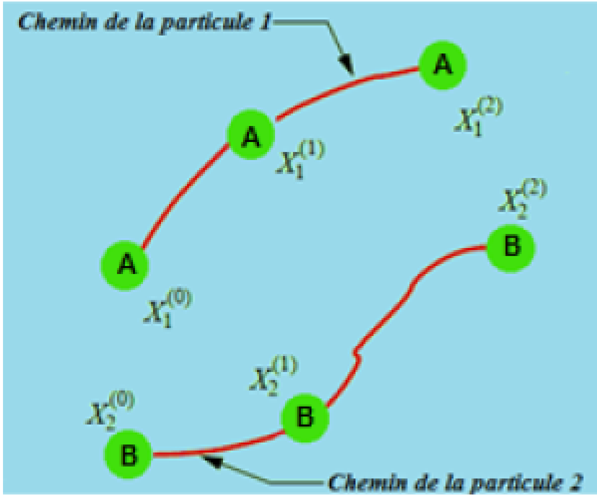
7.1. Approche Lagrangienne

Identifier (ou étiqueter) une particule fluide ; suivez-la au fur et à mesure qu'elle se déplace et surveillez les changements dans ses propriétés. Les propriétés peuvent être la vitesse, la

température, la densité, la masse ou la concentration, etc. dans le champ d'écoulement.

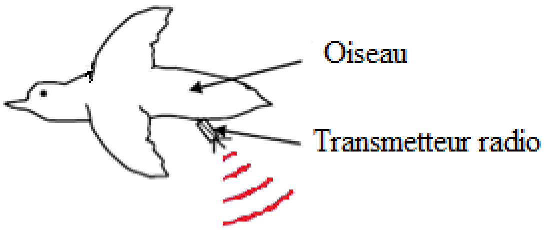
Reportez-vous à la figure ci-dessus. La particule fluide «A» au moment t a été déplacé vers un autre emplacement au moment t'. Sa propriété, par exemple la vitesse, est enregistrée lorsque la particule se déplace dans le champ d'écoulement :

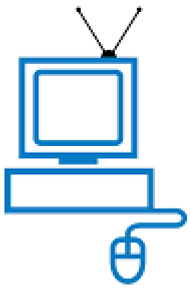
$$A: \quad \begin{array}{l} t_1 \rightarrow v_1 \\ t_2 \rightarrow v_2 \\ t_3 \rightarrow v_3 \end{array}$$



Notez que les vitesses enregistrées sont associées à la même particule de fluide, mais à des endroits différents et à des moments différents.

Imaginez un capteur de vitesse fixé sur un oiseau, volant dans l'atmosphère et enregistrant la vitesse de l'oiseau dans le champ d'écoulement.





Dans ce cas, le capteur enregistre les données de vitesse suivantes :

Position	*Temps*	*Vitesse*
P1 (x1, y1, z1)	t1	v1
P2 (x2, y2, z2)	t2	v2
P3 (x3, y3, z3)	t3	v3

Le changement temporel de la vitesse dans une telle mesure est désigné par :

$$\frac{dv}{dt}$$

Appelé dérivé matériel ou dérivé substantiel. Il reflète le changement temporel de la vitesse (ou de toute autre propriété) de la particule fluide marquée (ciblée), observée par un observateur se déplaçant avec la particule fluide. L'approche lagrangienne est également appelée «approche basée sur la particule».

Exemple

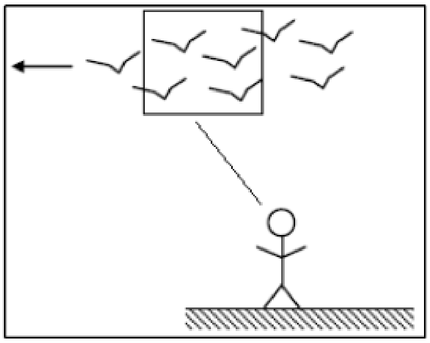
L'écoulement est suivi par un observateur depuis une position fixe. C'est le cas, par exemple, d'un atterrisseur sur Mars fixé au sol qui mesure la vitesse du vent, la température, ou la pression. Cette description est souvent préférée car elle est la plus pratique.

7.2. Approche Eulérienne

Identifiez (ou étiquetez) un certain emplacement fixe dans le champ d'écoulement et suivez l'évolution de sa propriété, à mesure que différentes particules passent par cet emplacement.

Dans ce cas, la propriété suivante, par exemple, la température est enregistrée par le capteur :

temps	Température
t_1	T_1
t_2	T_2
t_3	T_3
...	...
t_n	T_n



Notez que les températures enregistrées sont associées à l'emplacement fixe dans le champ d'écoulement, ayant différents particules fluide à différents moments.

Disons que nous sommes intéressés par le taux de variation temporelle du changement de température, T, que la particule observe lorsqu'elle se déplace d'un endroit à l'autre. La particule peut subir un changement de température car la température de tout le champ de fluide peut changer en fonction du temps (c'est-à-dire que le champ de température peut être instable).

De plus, le champ de température peut avoir des gradients spatiaux (différentes températures à différents endroits, c'est-à-dire non uniformes), de sorte que lorsque la particule se déplace d'un point à l'autre, elle subit un changement de température.

Ainsi, la particule subit deux effets qui peuvent provoquer un changement de température dans le temps : les effets instables, également appelés effets locaux ou eulériens, et les effets de gradient spatial, également appelés effets de convection. Nous pouvons décrire cela en termes mathématiques en écrivant la température de tout le champ en fonction du temps, t et de l'emplacement, x :

$$T = T(t, x)$$

Notez que l'emplacement de la particule de fluide est fonction du temps : x = x (t) de sorte que :

$$T = T(t, x(t))$$

Prendre la dérivée temporelle de la température, étendre le vecteur de localisation en ses composantes x, y et z et utiliser la règle de chaîne donne :

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{\substack{Suivant \\ une\ particule \\ fluide}} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x}\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=u_x} + \frac{\partial T}{\partial y}\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{=u_y} + \frac{\partial T}{\partial z}\underbrace{\frac{dz}{dt}}_{=u_z}$$

Récrivant cela sous une forme plus compacte :

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_x\frac{\partial T}{\partial x} + u_y\frac{\partial T}{\partial y} + u_z\frac{\partial T}{\partial z}$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\boldsymbol{u}.\nabla)T$$

La notation, D/Dt, indiquant une dérivée lagrangienne (parfois désigne un élément matériel ou, (substantiel), est utilisée dans l'éq. Précédente pour indiquer que nous suivons un élément

(morceau) de fluide particulier et non pas une particule seulement. Plus généralement, nous avons :

$$\underbrace{\frac{D}{Dt}(\dots)}_{\substack{Taux\ de\ variation \\ Lagrangien}} = \underbrace{\frac{\partial(\dots)}{\partial t}}_{\substack{Variation\ locale \\ ou\ d'Euler\ (effet\ du\ temps)}} + \underbrace{(\boldsymbol{u}.\nabla)(\dots)}_{\substack{Variation\ convective \\ due\ au\ variation\ de\ position \\ de\ la\ particule}}$$

$$\frac{D}{Dt}(\dots) = \frac{\partial}{\partial t}(\dots) + u_x\frac{\partial}{\partial x}(\dots) + u_y\frac{\partial}{\partial y}(\dots) + u_z\frac{\partial}{\partial z}(\dots)$$

Où (...) représente toute grandeur d'intérêt dans le champ d'écoulement [3].

8. Champ de vitesse et champ d'accélération

Remarque

La vitesse v en mécanique des fluides désigne la norme du vecteur vitesse d'une particule de fluide.

En conséquence on peut avoir v(M) =0 bien que la vitesse moyenne d'une molécule soit non nulle

Sur la base du concept du milieu continu qu'on a accordé au fluide, la description des propriétés du fluide (densité, pression, vitesse, accélération etc. ...) peuvent être des fonctions de l'espace, et peuvent par conséquence être représentées graphiquement.

Une de ces grandeurs est le champ de vitesse. Il s'agit d'une fonction vectorielle de la position et du temps avec les composantes u, v et w. Dans un système Eulérien, la formulation du vecteur de vitesse en coordonnées cartésiennes est définie comme :

$$\vec{V} = u(x,y,z,t)\vec{i} + v(x,y,z,t)\vec{j} + w(x,y,z,t)\vec{k}$$

La dérivée totale par rapport au temps du vecteur de vitesse est le vecteur d'accélération:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d[u(x,y,z,t)]}{dt}\vec{i} + \frac{d[v(x,y,z,t)]}{dt}\vec{j} + \frac{d[w(x,y,z,t)]}{dt}\vec{k}$$

Pour la composante de vitesse u, on peut écrire :

$$\frac{d[u(x,y,z,t)]}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dz}{dt}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial t} + w\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial t} + w\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{V}.\nabla)u$$

De même pour les composantes v et w, on a :

$$\frac{d[v(x,y,z,t)]}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + (\vec{V}.\nabla)v$$

$$\frac{d[w(x,y,z,t)]}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + (\vec{V}.\nabla)w$$

Sommons les trois termes précédents, on écrit :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \left(u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}\right) = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}.\nabla)\vec{V}$$

Il vient donc :

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

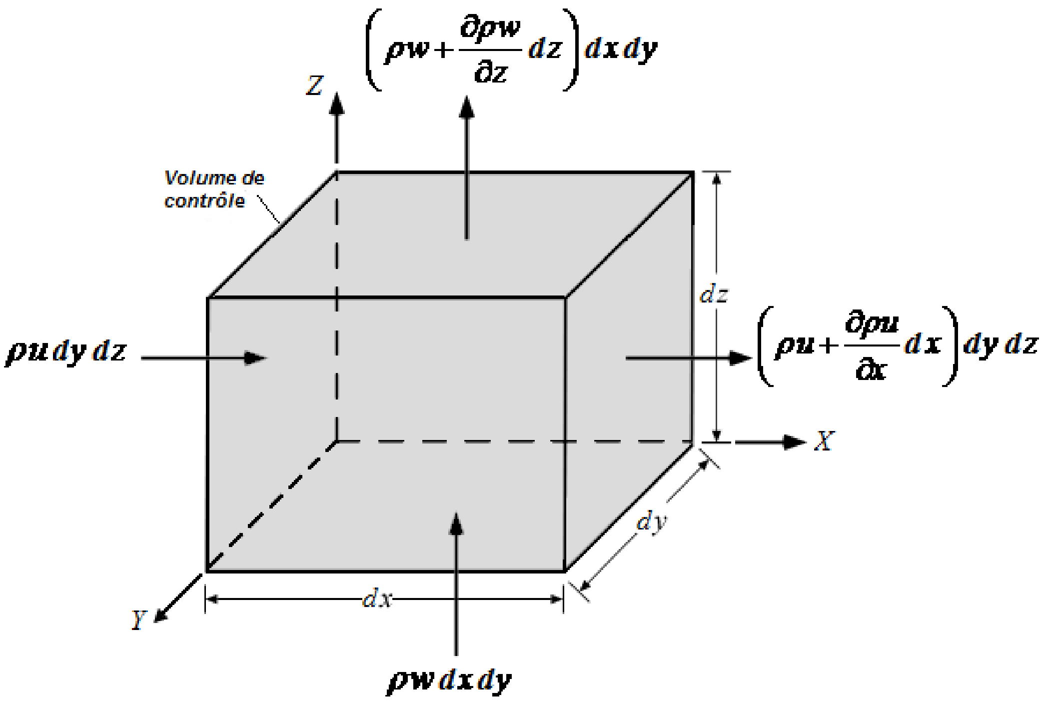
9. Équation de continuité (forme différentielle)

Complément

L'équation de continuité est simplement un bilan de masse d'un fluide circulant à travers un élément de volume stationnaire . Il indique que le taux d'accumulation de masse dans cet élément de volume est égal au taux de masse entrant moins le taux de masse sortant.

Mathématiquement, elle est représentée, comme étant le taux de variation de masse d'un système est nul. Par définition, un système = quantité de masse fixe.

Considérons un élément fluide parallélépipédique de volume dV=dxdydz incompressible au repos [5].



L'équation de continuité stipule que ; un système = quantité de masse fixe. Ce qui nous permis d'écrire :

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \sum_i \, (\rho_i A_i V_i)_{Sortantes} - \sum_i \, (\rho_i A_i V_i)_{Entrantes} = 0$$

Avec, $\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz$

Essayons de développer les termes de l'équation ci-dessus suivant les trois axes ox, oy et oz. Pendant le temps dt, il entre par la face dydz un débit massique de fluide égale à :

$$\rho u dydz$$

Pendant le même temps, il sort part la face opposée dydz, un flux massique de fluide égale à celui qui est entré, augmenté de sa différentielle partielle par rapport à x. or seules les grandeurs peuvent varier suivant x. le débit massique sortant est donc :

$$\left[\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u)dx\right] dydz$$

La différence de ces deux termes donne :

$$+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)dxdydz$$

Qui représente la variation (augmentation) du débit massique traversant le parallélépipède. Par un raisonnement similaire, on peut déterminer la variation en débit à travers les autres faces.

Les résultats obtenus sont regroupés dans le tableau

Face	*Débit massique entrant*	*Débit massique sortant*	*Augmentation*
x	$\rho u dydz$	$\left[\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u)dx\right] dydz$	$+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)dxdydz$
y	$\rho v dxdz$	$\left[\rho v + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v)dy\right] dxdz$	$+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)dydxdz$
z	$\rho w dxdy$	$\left[\rho w + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)dz\right] dxdy$	$+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w)dzdxdy$

L'équation de continuité devient :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \vec{V} = div\vec{V} = 0$$

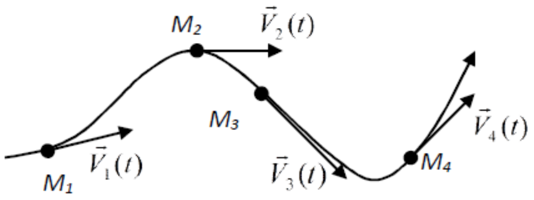
C'est la forme recherchée de l'équation de conservation de masse pour un volume de contrôle infinitésimal dans un système de coordonnées cartésiennes.

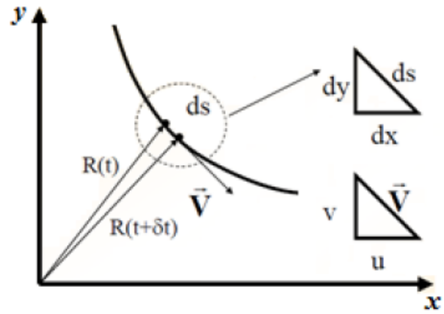
Elle est applicable aux principales catégories d'écoulement, visqueux, non visqueux, pour fluide incompressible, ou un fluide compressible. Souvent appelée équation de continuité car elle ne nécessite aucune hypothèse, sauf le fait que la densité et la vitesse sont des fonctions continues.

10. Notion de lignes de courant, trajectoire, tube de courant

10.1. Ligne de courant (ligne d'écoulement)

Une ligne de courant est la courbe qui est tangente en chacun de ces points au vecteur de vitesse en ces points





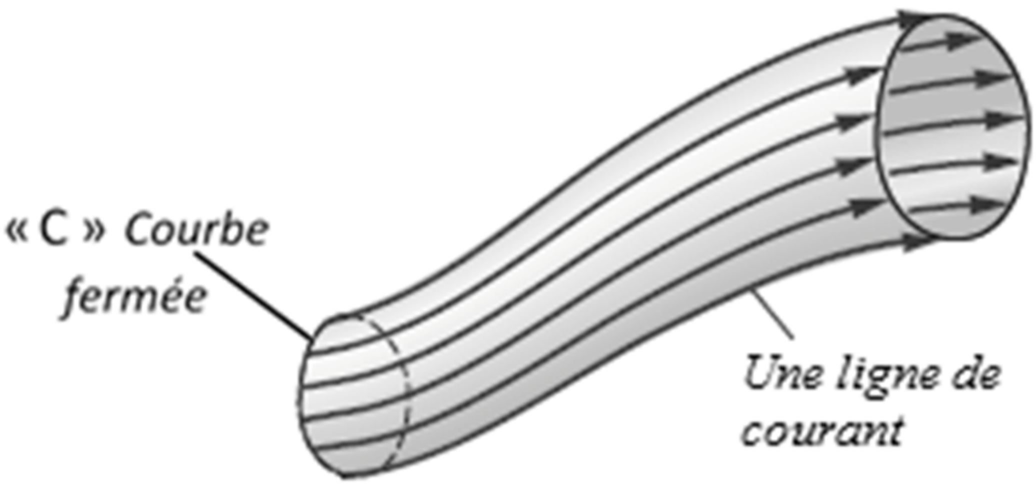
Une Ligne de courant est définie par les équations différentielles suivantes :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

Les lignes de courant changent d'un instant à l'autre. Mais dans un écoulement permanent, elles ne varient pas et coïncident avec les trajectoires.

10.2. Le tube de courant

Un volume de fluide limité par des lignes de courant s'appuyant sur une courbe fermée est appelé tube de courant [6].



10.3. Surface de courant

Une surface de courant est l'infinité des Lignes de courant qui s'appuient à un instant donné, sur une courbe C donnée.

La vitesse en un point quelconque de cette surface est située à l'instant considéré, dans le plan tangent de telle sorte que si :

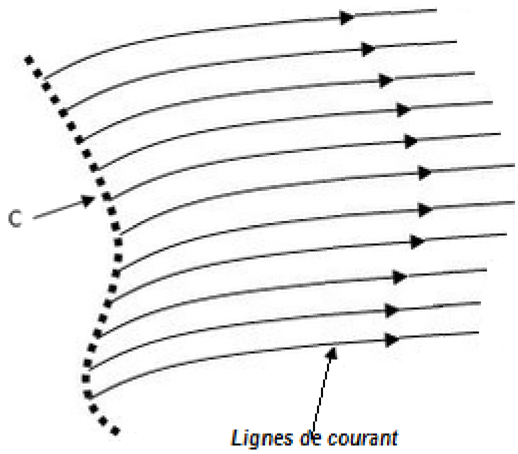
$$F(x, y, z, t)=K, \qquad K = Cte$$

Est l'équation différentielle de cette surface de courant, on a :

$$u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

L'expression (3) représente l'équation différentielle des surfaces de courant passant à l'instant considéré par le point où la vitesse est V (u, v, w).

Aux différentes valeurs de K, correspondent les diverses surfaces de courant passant par ce point. Lorsque la courbe C est fermée, la surface devient un tube de courant.



11. Utilisation des transformations conformes

L'utilisation des transformations conformes est un moyen puissant permettant l'étude des écoulements autour de profils quelconques. En effet, considérons un écoulement dans un plan et défini par le potentiel complexe f(z) et de vitesse complexe.

Effectuons sur le plan des z une transformation biunivoque z = h(Z) faisant correspondre aux points m d'affixe z des points M d'affixe Z et au domaine d, le domaine D du plan des Z.

La vitesse complexe U de l'écoulement dans D est alors donnée par U = uh'(Z). On montre que

es transformations conformes conservent les débits et les circulations ; elles transforment les sources et les tourbillons en sources et tourbillons de même intensité.

La détermination du mouvement autour d'un profil quelconque revient à trouver la transformation conforme permettant de transformer l'extérieur du profil en un cercle puisque l'écoulement autour de celui-ci est parfaitement connu. Cette technique est très précieuse pour la détermination des meilleurs profils d'ailes d'avions.

III Exercice : champs de vitesse

[*solution* n°3 p.21]

Considérons le champ de vitesse d'un écoulement de fluide incompressible donnée par :

Calculez l'accélération matérielle au point (x, y) = (2, 3).

IV Exercice : Cinématique des Fluides

[solution n°4 p.21*]*

Dans la des fluides, nous allons nous intéresser aux par rapport au temps, indépendamment des causes qui les provoquent, c'est-à-dire sans prendre en compte les forces qui sont à leur .

V Exercice :

Étude cinématique d'un écoulement

Le champ de vitesse d'un écoulement satisfait l'équation :$\vec{V} = (Ax\vec{e}_x - y\vec{e}_y)$, $A = 1(1/s)$

1/ L'écoulement est-il stationnaire ?

2/ Le fluide est incompressible. L'équation de continuité est-elle vérifiée ?

3/ Montrer que les lignes de courant sont des hyperboles, que l'on représentera ;

4/ On considère une particule de fluide située en $x0 = 1$ et $y0 = 1$ à l'instant $t = 0$. Donner

l'équation de la trajectoire de cette particule. Comparer la avec celle de la ligne de courant.

5/ Calculer de deux manières différentes l'accélération.

Solutions des exercices

> **Solution** n°1

Exercice p. 6

Une particule fluide, en mécanique des fluides, est un volume élémentaire de fluide d'échelle mésoscopique. L'échelle mésoscopique est typiquement de l'ordre du micromètre.

> **Solution** n°2

Exercice p. 7

Trouver la hauteur de la surface libre si 0,02 m3 d'eau sont remplies dans un réservoir de forme conique de hauteur h = 0,5 m et de rayon à la base de r = 0,25 m.

- Combien de quantité d'eau supplémentaire est nécessaire pour remplir entièrement le réservoir ?

- Si ce réservoir contient 30,5 kg d'huile, quelle est la masse volumique de cette huile ?

V (cône)= 0,0327 m3 , V (vide-haut cône)= 0,0127 m3, masse volumique=932,7 kg/m3

> **Solution** n°3

Exercice p. 18

Considérons le champ de vitesse d'un écoulement de fluide incompressible donnée par :

Calculez l'accélération matérielle au point (x, y) = (2, 3).

Utilisons l'équation de l'accélération matérielle en coordonnées cartésiennes.

> **Solution** n°4

Exercice p. 19

Dans la `cinématique` des fluides, nous allons nous intéresser aux `mouvements des fluides` par rapport au temps, indépendamment des causes qui les provoquent, c'est-à-dire sans prendre en

compte les forces qui sont à leur `source`.